Informatique théorique et applications

P. Glesser

Majoration de la norme des facteurs d'un polynôme : cas où toutes les racines du polynôme sont réelles

Informatique théorique et applications, tome 27, nº 2 (1993), p. 121-134.

<http://www.numdam.org/item?id=ITA_1993__27_2_121_0>

Informatique théorique et Applications/Theoretical Informatics and Applications
(vol. 27, n° 2, 1993, p. 121 à 134)

MAJORATION DE LA NORME DES FACTEURS D'UN POLYNÔME : CAS OÙ TOUTES LES RACINES DU POLYNÔME SONT RÉELLES (*)

par P. GLESSER [1]

Communiqué par J. BERSTEL

Résumé. – *On s'intéresse dans la première partie de cet article aux polynômes dont toutes les racines sont réelles. On démontre en particulier des majorations de la norme des facteurs de tels polynômes. Ces majorations sont notamment utiles pour les algorithmes de factorisation des polynômes. Dans la deuxième partie, on donne une majoration du nombre de racines réelles d'un polynôme quelconque, ainsi qu'une minoration de la norme d'un polynôme en fonction de la répartition de ses racines dans le plan complexe.*

Abstract. – *In the first part of this paper, we give upper bounds for the norm of factors of polynomials whose zeroes are real. These bounds are very useful in polynomial factorization algorithms. In the second part, we prove an upper bound for the number of real roots of any polynomial, and also a lower bound for the norm of a polynomial, depending on the distribution of its roots in the complex plane.*

Étant donné un polynôme $P=a_p X^p+a_{p-1} X^{p-1}+\ldots+a_0$ à coefficients complexes, on considère les quantités suivantes :

– la longueur de P, $L(P)=\sum_{i=0}^{p} |a_i|$;

– la norme quadratique de P, $\|P\|=\left(\sum_{i=0}^{p} |a_i|^2\right)^{1/2}$;

– la norme de P, $|P|=\sup_\theta |P(e^{i\theta})|$;

– la mesure de Mahler de P, $M(P)=|a_p| \prod_{i=1}^{p} \max(1, |\alpha_i|)$, où les α_i sont les racines de P.

(*) Reçu juillet 1991, et dans sa version révisée en juin 1992.

[1] Université Louis Pasteur, 7, rue René Descartes, 67084 Strasbourg.

Les trois premières notions peuvent être comparées grâce aux inégalités suivantes :

$$\| P \| \leqq | P | \leqq L(P) \leqq \sqrt{p+1}\, \| P \|,$$

alors que la mesure de Mahler vérifie

$$L(P) \leqq 2^p M(P) \qquad \text{et} \qquad M(P) \leqq \| P \|,$$

cette dernière inégalité étant l'inégalité de Landau (*cf.* [7]).

Les algorithmes de factorisation des polynômes à coefficients entiers ont besoin pour fonctionner d'une majoration de la norme des facteurs du polynôme à factoriser. Appelons Q ce dernier et q son degré. Si P est un facteur de degré p de Q, on utilise la majoration

$$L(P) \leqq 2^p M(Q)$$

(*cf.* [6], [8] et [9]), qui devient

$$L(P) \leqq 2^p \| Q \|$$

avec l'inégalité de Landau.

Pour minimiser les temps de calcul de ces algorithmes, il est évidemment utile d'améliorer ces majorations. Malheureusement ceci n'est pas possible dans le cas général (cf. [10]). En revanche, dans le cas où le polynôme Q vérifie certaines propriétés particulières (cf. [4] et [10]), on peut trouver de meilleures majorations.

Nous allons ici examiner le cas des polynômes dont toutes les racines sont réelles pour lequel nous obtiendrons entre autres la majoration suivante de la norme

$$| P | \sqrt{| cd(Q)\, Q(0) |} \leqq \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^p | Q | \sqrt{| cd(P)\, P(0) |}$$

(si Q est à coefficients entiers, $\sqrt{| cd(P)\, P(0) |} \leqq \sqrt{| cd(Q)\, Q(0) |}$), où $cd(Q)$ désigne le coefficient dominant de Q (cf. corollaire 2).

Les deux premières sections de cet article sont consacrées à des résultats intermédiaires. Dans la première on donne une inégalité qui permet de se ramener au cas d'un polynôme dont toutes les racines sont de module un, ce qui simplifie les démonstrations des résultats des sections suivantes. Dans la deuxième on minore la norme d'un polynôme dont toutes les racines sont réelles, ce qui va nous servir dans les sections 3) et 4).

La troisième section est consacrée au résultat principal de cet article, à savoir les majorations de la norme des facteurs d'un polynôme dont toutes les racines sont réelles.

Dans la quatrième section, nous démontrerons également une majoration du nombre de racines réelles d'un polynôme quelconque à coefficients complexes, qui s'avère meilleure que la classique inégalité de Schur lorsque $|Q|/\sqrt{|cd(Q)Q(0)|} \geqq e^{q/4}$.

Enfin, dans le même esprit, nous démontrerons dans la cinquième section une minoration de la norme d'un polynôme en fonction de la répartition de ses racines dans un secteur du plan, minoration que nous comparerons avec celle d'Erdös-Turán.

1. UNE INÉGALITÉ PRÉLIMINAIRE

Il peut arriver, et c'est notamment le cas dans cet article, que pour simplifier des calculs sur un polynôme P donné, il soit nécessaire de considérer le polynôme unitaire que nous noterons P_u dont les racines sont de module un et d'arguments égaux aux arguments des racines de P. Il faut dans ce cas pouvoir estimer par exemple la norme de P en fonction de la norme de P_u. Dans [2] Erdös et Turán proposent l'inégalité suivante,

$$|P| \geqq \sqrt{|cd(P)P(0)|}\,|P_u|.$$

Nous allons dans cette section démontrer une inégalité un peu différente. Pour cela nous utiliserons les deux lemmes suivants.

LEMME 1 : *Soit P un polynôme à coefficients complexes de degré n dont les racines sont notées $\rho_j e^{i\theta_j}$ $(j=1, \ldots, n)$ et soit θ un réel quelconque. Alors on a l'inégalité*

$$|P(e^{i\theta})| \geqq |cd(P)| \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{\rho_j+1}{2}\right) |P_u(e^{i\theta})|.$$

Preuve. Le polynôme P est égal à

$$cd(P)(X-\rho_1 e^{i\theta_1}) \ldots (X-\rho_n e^{i\theta_n}),$$

et P_u est défini par

$$P_u(X)=(X-e^{i\theta_1}) \ldots (X-e^{i\theta_n}).$$

Soit θ un réel quelconque. Si θ est égal à l'argument d'une des racines de P alors l'inégalité du lemme est trivialement vraie. Sinon pour tout j $(1 \leqq j \leqq n)$ on considère le rapport

$$\left|\frac{e^{i\theta}-\rho_j e^{i\theta_j}}{e^{i\theta}-e^{i\theta_j}}\right| = \sqrt{\frac{1-2\rho_j\cos(\theta_j-\theta)+\rho_j^2}{2-2\cos(\theta_j-\theta)}}.$$

Or la fonction $x \mapsto (1-2\rho x+\rho^2)/(2-2x)$ étant croissante, elle atteint son minimum pour $x \in [-1, 1[$ en -1, ce qui montre que

$$\left|\frac{e^{i\theta}-\rho_j e^{i\theta_j}}{e^{i\theta}-e^{i\theta_j}}\right| \geqq \frac{\rho_j+1}{2}.$$

Ceci étant vrai pour tous les j $(1 \leqq j \leqq n)$, on a bien

$$\left|\frac{P(e^{i\theta})}{P_u(e^{i\theta})}\right| \geqq |cd(P)| \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{\rho_j+1}{2}\right).$$

Pour simplifier l'inégalité du lemme précédent, on va démontrer un résultat qui va permettre de remplacer dans l'inégalité, le produit des $(\rho_j+1)/2$ par une formule qui ne dépend que de $P(0)$ et de $cd(P)$.

LEMME 2 : *Soient $a_1, \ldots, a_n$ n nombres réels positifs. Alors on a l'inégalité*

$$(1+a_1^n)\ldots(1+a_n^n) \geqq (1+a_1\ldots a_n)^n.$$

Preuve. On a

$$(1+a_1^n)\ldots(1+a_n^n) = 1 + \sum_{r=1}^{n} \sum_{i_1<\ldots<i_r} (a_{i_1}\ldots a_{i_r})^n,$$

et

$$(1+a_1\ldots a_n)^n = 1 + \sum_{r=1}^{n} \binom{n}{r} (a_1\ldots a_n)^r.$$

Or, la moyenne arithmétique étant supérieure à la moyenne géométrique, on a

$$\sum_{i_1<\ldots<i_r} (a_{i_1}\ldots a_{i_r})^n \geqq \binom{n}{r} \left[\prod_{i_1<\ldots<i_r} (a_{i_1}\ldots a_{i_r})^n\right]^{1/\binom{n}{r}},$$

mais

$$\prod_{i_1<\ldots<i_r} a_{i_1}\ldots a_{i_r}=(a_1\ldots a_n)^{\binom{n-1}{r-1}},$$

d'où la conclusion.

Finalement on obtient sans difficulté à partir des deux lemmes précédents l'inégalité

$$|P(e^{i\theta})|\geqq\left(\frac{|cd(P)|^{1/n}+|P(0)|^{1/n}}{2}\right)^n|P_u(e^{i\theta})|, \qquad (*)$$

qui devient

$$|P|\geqq\left(\frac{|cd(P)|^{1/n}+|P(0)|^{1/n}}{2}\right)^n|P_u|, \qquad (**)$$

si l'on choisit θ de telle sorte que $|P_u(e^{i\theta})|=|P_u|$, puisque $|P|\geqq|P(e^{i\theta})|$. De plus, il est facile de vérifier que dans tous les cas on a,

$$\left(\frac{|cd(P)|^{1/n}+|P(0)|^{1/n}}{2}\right)^n\geqq\sqrt{|cd(P)P(0)|} \qquad (***)$$

(ce qui redémontre l'inégalité $|P|\geqq\sqrt{|cd(P)P(0)|}\ |P_u|$), et l'égalité n'a lieu que si $|cd(P)|=|P(0)|$.

Remarque. On peut encadrer la quantité $((|cd(P)|^{1/n}+|P(0)|^{1/n})/2)^n$ de la manière suivante,

$$\inf(|cd(P)|,\ |P(0)|)\leqq((|cd(P)|^{1/n}+|P(0)|^{1/n})/2)^n\leqq\sup(|cd(P)|,\ |P(0)|).$$

2. VALEUR D'UN POLYNÔME À RACINES RÉELLES SUR LE CERCLE UNITÉ

B. Beauzamy (cf. [1]) a montré que si R est un polynôme à coefficients réels de degré r, dont toutes les racines sont réelles, alors

$$|R|\geqq|R(e^{i\pi/2})|\geqq 2^{r/2}\sqrt{|cd(R)R(0)|}.$$

Le résultat que nous allons démontrer dans cette section est une généralisation de l'inégalité précédente et va nous servir pour démontrer les inégalités des sections 3) et 4).

Si l'on considère un polynôme R dont toutes les racines sont réelles, le polynôme R_u tel qu'il est défini dans la section précédente aura toutes ses racines égales à 1 ou -1, et comme pour tout réel θ, $|e^{i\theta} \pm 1|^2 \geqq (2 - 2|\cos\theta|)$, on démontre en utilisant l'inégalité (*), le corollaire suivant.

COROLLAIRE 1 : *Soit R un polynôme à coefficients réels de degré r et dont toutes les racines sont réelles, et soit θ un réel quelconque. Alors,*

$$|R(e^{i\theta})| \geqq (2 - 2|\cos\theta|)^{r/2} \left(\frac{|cd(\mathrm{R})|^{1/r} + |R(0)|^{1/r}}{2} \right)^r.$$

De ce corollaire on déduit deux inégalités, la première en utilisant l'inégalité (***) de la section précédente, la seconde en prenant θ égal à $\pi/2$,

$$|\mathrm{R}(e^{i\theta})| \geqq (2 - 2|\cos\theta|)^{r/2} \sqrt{|cd(R)\,R(0)|}, \tag{1}$$

$$|R| \geqq \left(\frac{|cd(R)|^{1/r} + |R(0)|^{1/r}}{\sqrt{2}} \right)^r. \tag{2}$$

3. MAJORATION DE LA NORME DES FACTEURS D'UN POLYNÔME À RACINES RÉELLES

A partir de maintenant on considère un polynôme Q de degré q à coefficients réels dont toutes les racines sont réelles, et un facteur P de degré p de ce polynôme. Le but de ce qui suit est de majorer la norme du facteur P en fonction de la norme du polynôme Q. Pour cela on démontre d'abord un lemme qui donne une majoration dépendant d'un paramètre γ, dont on va déduire en donnant deux valeurs différentes à γ, deux majorations optimales, la première lorsque $q \geqq 2p$, la seconde lorsque $q \leqq 2p$.

L'inégalité 1) de la section précédente appliquée au polynôme $R = Q/P$, permet de démontrer la majoration suivante.

LEMME 3 : *Soit Q un polynôme de degré q à coefficients réels dont toutes les racines sont réelles, et soit P un facteur de degré p de ce polynôme. Pour tout γ compris entre 0 et $\pi/2$ on a,*

$$|P| \leqq \frac{2^{(p-r)/2}\,|Q|}{(1+\cos\gamma)^{p/2}\,(1-\cos\gamma)^{r/2}\,\sqrt{|cd(R)\,R(0)|}}$$

(*r est le degré de $R = Q/P$*).

Preuve. Soit θ tel que $|P|=|P(e^{i\theta})|$. On suppose que $0 \leqq \theta \leqq \pi/2$ (on peut toujours supposer que $0 \leqq \theta \leqq \pi$ puisque les racines de P sont réelles, et si $\theta \geqq \pi/2$ on considère $P(-X)$ qui divise $Q(-X)$).

Soit γ un réel quelconque compris entre 0 et $\pi/2$. On considère deux cas.

a) $\gamma \geqq \theta$.

Dans cette situation on a

$$|P|=|P(e^{i\theta})|=\frac{|P(e^{i\theta})\,Q(e^{i\gamma})|}{|P(e^{i\gamma})\,R(e^{i\gamma})|},$$

qui est inférieur ou égal à

$$\frac{|P(e^{i\theta})|\,|Q|}{|P(e^{i\gamma})|\sqrt{|cd(R)\,R(0)|}\,(2-2\cos\gamma)^{r/2}}$$

d'après (1).

De plus $|P(e^{i\theta})|/|P(e^{i\gamma})|$ est égal à

$$\prod_{i=1}^{p}\left|\frac{1+\alpha_i^2-2\,\alpha_i\cos\theta}{1+\alpha_i^2-2\,\alpha_i\cos\gamma}\right|^{1/2}$$

(on note $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ les racines de P). Or le maximum de la fonction $(1+x^2-2x\cos\theta)/(1+x^2-2x\cos\gamma)$ est atteint pour $x=-1$ (car $\cos\theta \geqq \cos\gamma$), et vaut donc $(1+\cos\theta)/(1+\cos\gamma)$ qui est inférieur ou égal à $2/(1+\cos\gamma)$. Finalement on obtient bien l'inégalité

$$|P| \leqq \frac{2^{(p-r)/2}\,|Q|}{(1+\cos\gamma)^{p/2}\,(1-\cos\gamma)^{r/2}\sqrt{|cd(R)\,R(0)|}}.$$

b) $\gamma \leqq \theta$.

Dans cette situation on a

$$|P|=|P(e^{i\theta})|=\frac{|Q(e^{i\theta})|}{|R(e^{i\theta})|},$$

qui est inférieur ou égal à

$$\frac{|Q|}{\sqrt{|cd(R)\,R(0)|}\,(2-2\cos\theta)^{r/2}}$$

d'après (1), ce qui implique que

$$|P| \leqq \frac{2^{(p-r)/2}|Q|}{(1+\cos\gamma)^{p/2}(1-\cos\gamma)^{r/2}\sqrt{|cd(R)R(0)|}}$$

comme dans le premier cas, puisque $2/(1+\cos\gamma) \geqq 1$ et $\cos\gamma \geqq \cos\theta$.

En appliquant le lemme précédent avec respectivement γ égal à $\pi/2$ et γ égal à Arccos $((p-r)/(p+r))$ on obtient sans difficulté les deux inégalités suivantes.

THÉORÈME 1 : *Soit Q un polynôme de degré q à coefficients réels dont toutes les racines sont réelles, et soit P un facteur de degré p de ce polynôme. On a*

$$|P|\sqrt{|cd(Q)Q(0)|} \leqq \frac{2^p}{\sqrt{2^q}}|Q|\sqrt{|cd(P)P(0)|}. \tag{3}$$

Si on suppose de plus que $q \leqq 2p$, on a

$$|P|\sqrt{|cd(Q)Q(0)|} \leqq \frac{2^p}{2^q}\sqrt{\frac{q^q}{p^p(q-p)^{q-p}}}|Q|\sqrt{|cd(P)P(0)|}. \tag{4}$$

Remarques: L'inégalité (4) est meilleure que l'inégalité (3) dans tous les cas où elle est valable, c'est-à-dire quand $q \leqq 2p$, puisque $q^q/(p^p(q-p)^{q-p}) \leqq 2^q$.

L'inégalité (3) est optimale lorsque $q \geqq 2p$ avec q pair, comme le montre l'exemple suivant :

$$P=(X+1)^p, \qquad Q=(X^2-1)^p(X^2-1)^{q/2-p}$$

$(|P|=2^p,\ |Q|=\sqrt{2^q})$.

L'inégalité (4) est optimale pour tout p et tout q tels que $q \leqq 2p$ comme le montre l'exemple suivant :

$$P=(X+1)^p, \qquad Q=(X+1)^p(X-1)^{q-p}$$

(pour calculer $|Q|$ on remarque que

$$|Q(e^{i\theta})|=(2-2\cos\theta)^{(q-p)/2}(2+2\cos\theta)^{p/2}$$

pour tout θ réel, et il est facile de montrer que le maximum sur θ est atteint pour $\theta=\text{Arccos}((2p-q)/q)$, ce qui donne $|Q|^2=4^q p^p(q-p)^{q-p}/q^q$).

On conclut ce paragraphe en donnant deux conséquences du théorème 2, qui sont des majorations de la norme de P indépendantes pour la première du degré de Q, et pour la seconde du degré de P.

COROLLAIRE 2 : *Soit Q un polynôme de degré q à coefficients réels dont toutes les racines sont réelles, et soit P un facteur de degré p de ce polynôme. On a*

$$|P|\sqrt{|cd(Q)\,Q(0)|}\leqq\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{p}|Q|\sqrt{|cd(P)\,P(0)|},$$

ainsi que

$$|P|\sqrt{|cd(Q)\,Q(0)|}\leqq\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^{q}|Q|\sqrt{|cd(P)\,P(0)|}.$$

Preuve. Pour la première inégalité on pose $q=\lambda p$ dans (4) et on trouve que le majorant le plus grand est obtenu pour $\lambda=4/3$.

Pour la seconde inégalité on pose $p=\lambda q$ dans (4) et on trouve que le majorant le plus grand est obtenu pour $\lambda=4/5$.

Remarque: On peut comparer la deuxième inégalité du corollaire 2 avec l'inégalité $|P|\leqq(3/2)^q|Q|$ (cf. [5]) obtenue dans le cas d'un polynôme Q à coefficients complexes (on a supposé que $|cd(P)|\leqq|cd(Q)|$ et que $|P(0)|\leqq|Q(0)|$).

4. MAJORATION DU NOMBRE DE RACINES RÉELLES D'UN POLYNÔME

En utilisant l'inégalité (2) (cf. §2) ainsi que la majoration suivante de la norme des facteurs d'un polynôme

$$M(Q)\,|R|\leqq\frac{q^q}{2^{q-r}\,r^r\,(q-r)^{q-r}}\,|Q|\,M(R) \tag{5}$$

(cf. [5]), où R et Q sont deux polynômes de degrés respectifs r et q ($r\geqq q/2$) à coefficients complexes, et où R divise Q, on démontre une minoration de la norme d'un polynôme à coefficients complexes, en fonction du nombre de ses racines réelles, ce qui fournit par la même occasion une majoration du nombre de racines réelles d'un polynôme à coefficients complexes.

THÉORÈME 2 : *Soit Q un polynôme à coefficients complexes de degré q. Alors si le nombre de racines réelles de Q est égal à r et si $r\geqq q/2$,*

$$|Q|\geqq\frac{2^q\,r^r\,(q-r)^{q-r}}{\sqrt{2^{3\,r}}\,q^q}\left(|cd(Q)|^{1/r}+|Q(0)|^{1/r}\right)^r.$$

Preuve. a) On suppose que toutes les racines de Q ont un module inférieur ou égal à un. Soit $R=|cd(Q)|(X-\alpha_1)\ldots(X-\alpha_r)$ où $\alpha_1,\ldots,\alpha_r$ sont les racines réelles de Q. D'après l'inégalité (2)

$$|R|\geqq\left(\frac{|cd(R)|^{1/r}+|R(0)|^{1/r}}{\sqrt{2}}\right)^r,$$

d'où

$$|R|\geqq\left(\frac{|cd(Q)|^{1/r}+|Q(0)|^{1/r}}{\sqrt{2}}\right)^r$$

puisque les racines de Q ont un module inférieur ou égal à un.

D'autre part, comme R est un facteur de Q

$$|R|\leqq\frac{q^q}{2^{q-r}r^r(q-r)^{q-r}}|Q|$$

(on a $M(R)=M(Q)$), d'où, d'après la minoration de $|R|$,

$$|Q|\geqq\frac{2^{q-r}r^r(q-r)^{q-r}}{q^q}\left(\frac{|cd(Q)|^{1/r}+|Q(0)|^{1/r}}{\sqrt{2}}\right)^r,$$

ce qui démontre l'inégalité du théorème.

b) On n'impose aucune restriction aux racines de Q. Dans ce cas on considère le polynôme Q^* obtenu en multipliant Q par les facteurs de Blaschke ($B(\alpha, X)=(\bar{\alpha}X-1)/(X-\alpha)$) associés à ses racines de module supérieur à un, ce qui permet de se ramener au premier cas considéré. On a donc

$$|Q^*|\geqq\frac{2^{q-r}r^r(q-r)^{q-r}}{q^q}\left(\frac{|cd(Q^*)|^{1/r}+|Q^*(0)|^{1/r}}{\sqrt{2}}\right)^r.$$

Or, il est facile de vérifier que $|Q^*(0)|=|Q(0)\,cd(Q)|/M(Q)$, $|cd(Q^*)|=M(Q)$ et $|Q^*|=|Q|$. On obtient donc

$$|Q|\geqq\frac{2^{q-r}r^r(q-r)^{q-r}}{q^q}\left(\frac{|cd(Q)\,Q(0)/M(Q)|^{1/r}+|M(Q)|^{1/r}}{\sqrt{2}}\right)^r,$$

ce qui démontre l'inégalité du théorème, car $M(Q)\geqq\max(|cd(Q)|, |Q(0)|)$.

Remarque : On peut comparer cette inégalité à l'inégalité de Schur (cf. [12]),

$$r^2 \leqq 4\,q \log\left(\frac{L(Q)}{\sqrt{|cd(Q)\,Q(0)|}}\right),$$

qui équivaut à $L(Q) \geqq \exp(r^2/4\,q)\sqrt{|cd(Q)\,Q(0)|}$. En général l'inégalité de Schur est meilleure, mais si $L(Q)/\sqrt{|cd(Q)\,Q(0)|} \geqq e^{q/4}$, celle-ci donne $r \leqq q$, ce qui n'apporte aucune information sur le nombre de racines réelles de Q, alors que si $1{,}284 \simeq e^{1/4} \leqq (|Q|/\sqrt{|cd(Q)\,Q(0)|})^{1/q} \leqq \sqrt{2} \simeq 1{,}414$, l'inégalité du théorème 2 donne une majoration du nombre de racines réelles de Q, non triviale.

5. MINORATION DE LA NORME D'UN POLYNÔME EN FONCTION DE LA RÉPARTITION DE SES RACINES DANS UN SECTEUR DU PLAN COMPLEXE.

On se donne un polynôme Q dont un certain nombre de racines se trouvent dans un secteur S du plan, d'ouverture θ. En procédant de la même manière qu'au paragraphe précédent, c'est-à-dire en minorant la norme du polynôme P dont les racines sont les racines de Q qui se trouvent dans le secteur S, puis en majorant la norme de P en fonction de la norme de Q grâce à l'inégalité (5), on trouve une minoration de la norme de Q.

On commence donc par démontrer une minoration de la norme d'un polynôme dont toutes les racines se trouvent dans un secteur donné du plan complexe.

LEMME 4 : *Soit P un polynôme de degré p dont toutes les racines se trouvent dans un secteur S d'ouverture* θ. *Alors,*

$$|P| \geqq \left(2\cos\frac{\theta}{4}\right)^p \sqrt{|cd(P)\,P(0)|}.$$

Preuve. Soit z_0 le point du cercle unité qui se trouve hors du secteur S mais sur la bissectrice de ce dernier ($z_0 = e^{i(\theta_0+\pi)}$). Soit $\rho e^{i\alpha}$ une racine de $P(\theta_0 - \theta/2 \leqq \alpha \leqq \theta_0 + \theta/2)$. On a

$$|z_0 - \rho e^{i\alpha}|^2 = 1 + \rho^2 + 2\rho\cos(\alpha - \theta_0),$$

qui est supérieur ou égal à

$$1 + \rho^2 + 2\rho\cos(\theta/2).$$

Donc

$$\frac{|z_0-\rho e^{i\alpha}|^2}{\rho} \geqq 2+2\cos(\theta/2)=4\cos^2(\theta/4)$$

(le minimum est atteint pour $\rho=1$), ce qui prouve, si on applique ce résultat à chaque racine de P, que

$$\frac{|P(z_0)|^2}{|cd(P)\,P(0)|} \geqq \left(2\cos\frac{\theta}{4}\right)^{2p}.$$

Il suffit maintenant d'utiliser ce lemme et l'inégalité (5) pour obtenir le théorème suivant.

THÉORÈME 3 : *Soit Q un polynôme de degré q à coefficients complexes. Soit S un secteur du plan d'ouverture θ. On suppose que $\lambda q\,(1/2 \leqq \lambda \leqq 1)$ racines de Q se trouvent dans S. Alors,*

$$\frac{|Q|}{\sqrt{|cd(Q)\,Q(0)|}} \geqq \left[2\lambda^\lambda(1-\lambda)^{1-\lambda}\left(\cos\frac{\theta}{4}\right)^\lambda\right]^q. \tag{6}$$

Preuve. On commence par supposer que les racines de Q ont un module inférieur ou égal à un. Alors si $P=|cd(Q)|\,(X-\alpha_1)\dots(X-\alpha_{\lambda q})$ où $\alpha_1, \dots, \alpha_{\lambda q}$ sont les racines de Q qui se trouvent dans S, on aura d'après le lemme 4

$$|P| \geqq \left(2\cos\frac{\theta}{4}\right)^{\lambda q}\sqrt{|cd(P)\,P(0)|},$$

qui entraîne

$$|P| \geqq \left(2\cos\frac{\theta}{4}\right)^{\lambda q}\sqrt{|cd(Q)\,Q(0)|}.$$

De plus, d'après (5),

$$M(Q)\,|P| \leqq \frac{q^q}{2^{q(1-\lambda)}(\lambda q)^{\lambda q}(q(1-\lambda))^{q(1-\lambda)}}\,|Q|\,M(P),$$

d'où

$$|P| \leqq \left(\frac{1}{2^{1-\lambda}\lambda^\lambda(1-\lambda)^{1-\lambda}}\right)^q |Q|.$$

Le résultat du théorème s'obtient alors de manière évidente.

Si Q n'a pas toutes ses racines dans le disque unité, on le transforme en Q^* en utilisant ses facteurs de Blaschke, comme pour la démonstration du théorème 2 (la répartition des racines de Q^* est identique à celle des racines de Q).

Remarque: On peut comparer cette inégalité avec celle du théorème d'Erdös-Turán (cf. [2]),

$$L(Q) \geqq \left(\exp\left[\frac{1}{c^2}\left|\lambda - \frac{\theta}{2\pi}\right|^2\right]\right)^q \sqrt{|cd(Q)\,Q(0)|} \tag{7}$$

(on a conservé les notations du théorème 3). Le nombre c est une constante environ égale à 2,61 d'après Ganelius (cf. [3]). Cette inégalité qui est difficile est en général meilleure, elle donne en particulier une minoration de Q non triviale dans tous les cas, mais lorsque λ est proche de 1, l'inégalité du théorème 3 fournit une bonne minoration. Le tableau suivant donne pour quelques valeurs de θ, la valeur minimale de λ pour laquelle (6) est meilleure que (7):

θ	0	$\pi/10$	$\pi/5$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	$5\,\pi/4$
λ	0,6829	0,6691	0,6643	0,6729	0,7045	0,8800	0,9799

Lorsque θ est plus grand que $4\pi/3$ l'inégalité (7) est toujours meilleure.

BIBLIOGRAPHIE

1. B. Beauzamy, *Degree-free upper estimates in polynomial factorizations*, (manuscrit).
2. P. Erdös, P. Turán, On the distribution of the roots of polynomials, *Ann. Math.*, *51*, 1950, p. 105-119.
3. T. Ganelius, Sequences of analytic functions and their zeros, *Arkiv för Math*, *3*, 1954-1958, p. 1-50.
4. Ph. Glesser, *Bornes pour les algorithmes de factorisation des polynômes*, Thèse de Doctorat.
5. Ph. Glesser, Nouvelle majoration de la norme des facteurs d'un polynôme, *Comptes-Rendus de l'Acad. Roy. du Canada*, *XII*, n° 6, 1990, p. 224-228.
6. D. E. Knuth, *The art of computer programming*, Vol. 2, Seminumerical algorithms, Addison-Wesley, 1981.
7. E. Landau, Sur quelques théorèmes de M. Petrovic relatifs aux zéros des fonctions analytiques, *Bull. Soc. Math. de France.*, *33*, 1905, p. 251-261.
8. A. K. Lenstra, H. W. Lenstra Jr., L. Lovász, Factoring polynomials with rational coefficients, *Math. Ann.*, *261*, 1982, p. 515-534.

9. M. Mignotte, An inequality about factors of polynomials, *Math. Comp.*, *28*, 1974, p. 1153-1157.
10. M. Mignotte, An inequality about irreducible factors of integer polynomials, *J. of Number Theory*, *30*, 1988, p. 156-166.
11. M. Mignotte, Ph. Glesser, An inequality about irreducible factors of integer polynomials (II), *SYMSAC* August 1990 (Tokyo).
12. I. Schur, *Preuss. Akad. Wiss. Sitzungsber.* 1933, p. 403-428.