

JACQUELINE LACAZE

**Parties reconnaissables de monoïdes définis
par générateurs et relations**

Informatique théorique et applications, tome 26, n° 6 (1992), p. 541-552.

http://www.numdam.org/item?id=ITA_1992__26_6_541_0

© AFCET, 1992, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Informatique théorique et applications » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

PARTIES RECONNAISSABLES DE MONOÏDES DÉFINIS PAR GÉNÉRATEURS ET RELATIONS (*)

par Jacqueline LACAZE

Résumé. – On recherche des conditions suffisantes permettant d'étendre à certains monoïdes $M = A^*/\sim$, où \sim est une congruence engendrée par des commutations partielles et un nombre fini de relations du type $f=g$, les propriétés de reconnaissabilité déjà connues dans les monoïdes partiellement commutatifs.

Abstract. – Let \sim be a congruence generated by partial commutations, and finitely many relations $f=g$. Sufficient conditions permitting to extend to $M = A^*/\sim$ some recognizability properties of partially commutative monoids are studied.

I. INTRODUCTION

Dans toute la suite, A désigne un alphabet fini, les notations sont celles de [5]. Pour $u \in A^*$ et $a \in A$, $|u|$ désigne la longueur de u , $|u|_a$ le nombre d'occurrences de a dans u et $\text{alph}(u)$ l'ensemble $\{a \in A / |u|_a \geq 1\}$.

Si M est un monoïde, U une partie de M et u un élément de M , on note $u^{-1}U = \{v \in M / uv \in U\}$. Une partie U de M est reconnaissable si et seulement si la famille des $u^{-1}U$, pour $u \in M$, est une famille finie de parties de M . Si M est de la forme A^*/\sim , où \sim est une congruence définie sur A^* , pour toute partie U de M , il existe $X \subset A^*$ tel que U s'identifie avec la fermeture $[X]$ de X pour la congruence \sim . Alors U est une partie reconnaissable de M si et seulement si il existe X reconnaissable de A^* tel que $X = [X] = U$.

Dans toute la suite, θ désignera une relation binaire sur A . Le problème de la reconnaissabilité du produit de deux parties reconnaissables, ou de l'étoile d'une partie reconnaissable a été étudié ([1], [2], [6], [7], [8]) dans le cas du monoïde $M(A, \theta)$, quotient de A^* par la congruence \leftrightarrow engendrée

0

(*) Reçu avril 1991, accepté mars 1992.

(¹) U.F.R. Mathématiques, Informatiques, Gestion, Université Paul Sabatier, 31062 Toulouse Cedex, France.

par les couples (ab, ba) pour $(ab) \in \theta$; $M(A, \theta)$ est appelé le monoïde partiellement commutatif libre relativement à θ .

Le problème étudié ici est celui de l'extension de ces résultats à des monoïdes $M = A^*/\sim$, où \sim est une congruence engendrée par θ et par un ensemble fini R de couples (f, g) , f et g étant des mots de A^* .

On restreindra cette étude au cas où \sim préserve la longueur des mots. Dans le cas contraire, il est possible que même certaines parties finies de A^*/\sim ne soient pas reconnaissables, comme le montre l'exemple suivant : si $A = \{a, b\}$, $\theta = \emptyset$, $R = (ab, 1)$, alors $\{1\}$ n'est pas reconnaissable dans A^*/\sim puisque la fermeture $[1]$ de $\{1\}$ dans A^* , constituée par les mots m vérifiant $|m|_a = |m|_b$, n'est pas reconnaissable dans A^* .

Par ailleurs, une généralisation naturelle de la notion de commutation est celle de commutation conditionnelle dépendant du contexte à gauche (du type $mpq = mqp$, où m, q, p sont des mots de A^*). Il est clair que de telles relations préservent non seulement la longueur des mots, mais également le nombre d'occurrences de chaque lettre.

Dans toute la suite, les monoïdes considérés seront tous de la forme $M = A^*/\sim$, où \sim est une congruence permutative. Plus précisément, on supposera que \sim est engendré par θ et un ensemble fini R de couples (f, g) vérifiant $|f|_a = |g|_a$ pour tout a de A .

Pour toute partie X de A^* , la fermeture de X pour \leftrightarrow (resp. \sim) sera notée $[X]_{\theta}$ (resp. $[X]$).

On dira qu'une partie B de A est totalement dépendante si deux lettres distinctes de B ne commutent pas.

Étant donnés deux mots f et g de A^* , une factorisation $f = uv$ sera appelé chevauchement entre f et g si $|u| \geq 1$ et s'il existe w de A^* tel que $g = wu$.

Supposons que deux couples distincts de R ont des alphabets disjoints et que $\text{alph}(R)$ est une partie totalement dépendante de A ; supposons de plus que pour tout (f, g) de R , les chevauchements entre f et g ne sont pas trop importants (voir § III); on montre alors que si une partie X de A^* est telle que $[X]_{\theta}$ soit reconnaissable, il en est de même de $[X]$.

II. CAS DES MONOÏDES PARTIELLEMENT COMMUTATIFS

On dira que deux mots u et v commutent absolument (notation : $u \Gamma v$) si, pour tous $a \in \text{alph}(u)$ et $b \in \text{alph}(v)$, on a $(a, b) \in \theta$.

PROPOSITION 2.1. (Cori et Perrin [1]) : Soient $u, v \in A^*$;

(1) On a $uv \leftrightarrow_{\theta} xy$ si et seulement si :

$$u \leftrightarrow_{\theta} u_1 u_2, \quad v \leftrightarrow_{\theta} v_1 v_2,$$

$x \leftrightarrow_{\theta} u_1 v_1, y \leftrightarrow_{\theta} u_2 v_2$ pour des mots u_1, u_2, v_1, v_2 tels que $u_2 \Gamma v_1$.

(2) On a $uv \leftrightarrow_{\theta} x_1 x_2 \dots x_n$ si et seulement si :

$$u \leftrightarrow_{\theta} u_1 u_2 \dots u_n,$$

$v \leftrightarrow_{\theta} v_1 v_2 \dots v_n$ avec $u_i v_i = x_i$ ($1 \leq i \leq n$) et $v_i \Gamma u_{i+1} \dots u_n$ ($1 \leq i < n$).

Dans $M(A, \theta)$ le produit de deux parties reconnaissables est reconnaissable, plus précisément :

PROPOSITION 2.2. (Fliess [4]) : Soient X, Y deux parties reconnaissables de A^* vérifiant $X = [X]_{\theta}$ et $Y = [Y]_{\theta} \div [XY]_{\theta}$ est une partie reconnaissable de A^* .

Exemple 2.3 : On ne peut espérer étendre la proposition 2.2 à une congruence engendrée par θ et une famille finie R sans hypothèse supplémentaire :

soit $A = \{a, b, c\}$, $\theta = \{(a, b), (a, c)\}$, et \sim la congruence engendrée par θ et (abc, acb) . Posons $X = \{a\}$ et $Y = (bc)^*$. Il est clair que $X = [X]$ et $Y = [Y]$ sont deux parties reconnaissables de A^* . Par contre $[XY] = \{u \in A^* \mid |u|_a = 1 \text{ et } |u|_b = |u|_c\}$ n'est pas une partie reconnaissable de A^* .

III. RÉSULTATS PRÉLIMINAIRES

La congruence \sim est engendrée par θ et R , avec $|f|_a = |g|_a$ pour tout a de A et tout (f, g) de R . Suite au problème soulevé dans l'exemple 2.3. il est naturel de supposer que f n'admet pas de facteurs propres u, v tels que $f \leftrightarrow_{\theta} uv \leftrightarrow_{\theta} vu$. En fait on prendra ici une hypothèse plus forte en supposant $\text{alph}(f)$ totalement dépendant.

Le but du paragraphe est d'établir une propriété susceptible de jouer le rôle de la proposition 2.1. La principale difficulté rencontrée est due aux chevauchements qui peuvent exister entre f et g .

Conventions et notations

L'ensemble R sera supposé non redondant; en particulier R ne contiendra aucune règle du type (f, f) et, si $(f, g) \in R$, $(g, f) \notin R$. On notera $\bar{R} = \{(g, f) / (f, g) \in R\}$.

On dira que deux mots u et v sont en relation élémentaire s'il existe $m', m'' \in A^*$ tels que : $u = m' abm''$ et $v = m' bam''$ avec $(a, b) \in \theta$, ou $u = m' fm''$ et $v = m' gm''$ avec $(f, g) \in R \cup \bar{R}$. Alors $u \sim v$ si et seulement si il existe une suite $u_0 = u, u_1, \dots, u_n = v$ tels que u_i et u_{i+1} soient en relation élémentaire pour $i = 0, \dots, n-1$. On dira alors qu'il existe une chaîne de relations élémentaires de longueur n de u à v .

ε désignant un mot figurant dans une relation de R , $\bar{\varepsilon}$ désignera alors un mot tel que $(\varepsilon, \bar{\varepsilon}) \in R \cup \bar{R}$.

On dira que (f, g) est sans chevauchement s'il n'y a aucun chevauchement entre f et f , g et g , f et g .

LEMME 3.1 : Soit $R = \{(f, g)\}$, où $\text{alph}(f)$ est totalement dépendant et (f, g) sans chevauchement. Alors pour u, v, x de A^* , la relation $uv \sim x$ est équivalente à :

$$u \sim u_1 \alpha u_2, \quad v \sim v_1 \beta v_2, \quad x \leftrightarrow \underset{\theta}{u_1 v_1 \gamma u_2 v_2}$$

avec $v_1 \Gamma \alpha u_2, u_2 \Gamma v_1 \beta$ et $(\alpha\beta, \gamma) \in R \cup \bar{R} \cup \{(1, 1)\}$.

Exemple : $f = abc, g = acb$ où a, b, c sont trois lettres distinctes.

Preuve : On vérifie directement que si $u \sim u_1 \alpha u_2, v \sim v_1 \beta v_2$ et $x \leftrightarrow \underset{\theta}{u_1 v_1 \gamma u_2 v_2}$ et si les conditions de la définition 3.1 sont vérifiées, on a $uv \sim x$.

Supposons $uv \sim x$ et raisonnons par récurrence sur la longueur d'une chaîne de relations élémentaires de uv à x .

Si $uv \leftrightarrow \underset{\theta}{x}$, la propriété est vérifiée avec $\alpha\beta\gamma = 1, u_2 v_1 = 1, u_1 = u, v_2 = v$.

Sinon, on peut trouver y de A^* tel que $uv \sim y, y = l\varepsilon l', t = l\bar{\varepsilon} l'$ et $t \leftrightarrow \underset{\theta}{x}$, et tel que l'on puisse appliquer l'hypothèse de récurrence à y . On a donc $u \sim u_1 \alpha u_2, v \sim v_1 \beta v_2$ et $y \leftrightarrow \underset{\theta}{u_1 v_1 \gamma u_2 v_2}$ avec $v_1 \Gamma \alpha u_2, u_2 \Gamma v_1 \beta$ et $(\alpha\beta, \gamma) \in R \cup \bar{R} \cup \{(1, 1)\}$.

Si $\alpha = 1$ ou $\beta = 1$, on peut écrire $u' v' \leftrightarrow y = l \varepsilon l'$ avec $u \sim u' = u_1 u_2$ et $v \sim v' = v_1 v_2$. Par la proposition 2.1 : $u' \leftrightarrow u'_1 \alpha' u'_2$, $v' \leftrightarrow v'_1 \beta' v'_2$, avec $l = u'_1 v'_1$, $\varepsilon = \alpha' \beta'$, $l' = u'_2 v'_2$, $v'_2 \Gamma \alpha' u'_2$ et $\beta' \Gamma u'_2$. On en déduit que $x \leftrightarrow l \bar{\varepsilon} l' = u'_1 v'_1 \bar{\varepsilon} u'_2 v'_2$, ce qui est la propriété voulue.

Supposons $\alpha \neq 1$ et $\beta \neq 1$. $\text{Alph}(\varepsilon)$ étant totalement dépendant, les relations de commutation $v_1 \Gamma \alpha$ et $u_2 \Gamma \beta$ impliquent que ε ne contient aucune lettre de $v_1 u_2$. Alors, de $l \varepsilon l' \leftrightarrow u_1 v_1 \gamma u_2 v_2$, une extension aisée de la proposition 2.1 permet de déduire : $l \leftrightarrow u'_1 v'_1 \gamma' u'_2 v'_2$, $\varepsilon \leftrightarrow \delta_1 c \delta_2$, $l' \leftrightarrow u''_1 v''_1 \gamma'' u''_2 v''_2$ avec $u_1 = u'_1 \delta_1 u''_1$, $v_1 = v'_1 v''_1$, $\gamma = \gamma' c \gamma''$, $u_2 = u'_2 u''_2$, $v_2 = v'_2 \delta_2 v''_2$ et $\delta_1 \Gamma v'_1 \gamma' u'_2 v'_2$, $c \Gamma u'_2 v'_2 u''_1 v''_1$, $\delta_2 \Gamma u''_1 v''_1 \gamma'' u''_2$.

1^{er} cas : $\delta_1 \delta_2 = 1$, $c = \varepsilon$. Puisque $|\gamma| = |\varepsilon|$, on a $\gamma = \varepsilon$ et

$$l \bar{\varepsilon} l' \leftrightarrow u_1 v_1 \bar{\varepsilon} u_2 v_2,$$

ce qui permet de conclure.

2^e cas : si $\delta_1 \neq 1$ et $\delta_2 \neq 1$, les relations $\gamma' \Gamma \delta_1$ et $\gamma'' \Gamma \delta_2$ impliquent $\gamma' = \gamma'' = 1$, ce qui est incompatible avec $\gamma' c \gamma'' = \gamma$ et $|\gamma| = |\delta_1 c \delta_2|$.

3^e cas : si $\delta_1 \neq 1$ et $\delta_2 = 1$, on obtient $\varepsilon = \delta_1 c$ et $\gamma = c \gamma''$, et donc $c = 1$ puisqu'il n'y a pas de chevauchement.

4^e cas : si $\delta_1 = 1$ et $\delta_2 \neq 1$, on raisonne de même qu'au 3^e cas. \square

LEMME 3.2 : Soit $R = \{ (pfq, qgp) \}$, où $\text{alph}(pfq)$ est totalement dépendant, (pfq, qgp) ne présente pas d'autre chevauchement que p et q , et $f \neq g$. Alors il existe des sous-monoïdes $P_1, P'_1, P_2, P'_2, Q_1, Q'_1, Q_2, Q'_2$ de A^* , des isomorphismes φ_i de P_i dans P'_i et ψ_i de Q_i dans Q'_i ($i=1, 2$) tels que pour u, v, x de A^* , la relation $uv \sim x$ soit équivalente à : $u \sim u_1 u_2 \alpha u_3 u_4$, $u_4 \Gamma v_1 v_2 \beta v_3 v_4$, $u_3 \Gamma v_2 \beta$, $v_2 \Gamma \alpha$, l'une des conditions suivantes étant satisfaite :

(1) $u_2 \alpha u_3 v_2 \beta v_3 = m = 1$.

(2) $\alpha \beta = qgp$, $v_2 \Gamma p$, $u_3 \Gamma q$, $u_2 \in P_1$, $v_3 \in Q_1$ et

$$m = p \varphi_1(u_2) v_2 f u_3 \psi_1(v_3) q.$$

(3) $\alpha \beta = pfq$, $v_2 \Gamma q$, $u_3 \Gamma p$, $u_2 \in P_2$, $v_3 \in Q_2$ et

$$m = q \varphi_2(u_2) v_2 g u_3 \psi_2(v_3) p.$$

Preuve : Supposons d'abord $p \neq 1$ et $q \neq 1$. Notons P_1, P'_1 les sous-monoïdes de A^* respectivement engendrés par $\{qgb/b\Gamma p\}$ et $\{fqb/b\Gamma p\}$. $\text{Alph}(fpq)$ étant totalement dépendant, la relation $b\Gamma p$ implique que $\text{alph}(b) \cap \text{alph}(qg) = \emptyset$. Les systèmes générateurs de P_1 et P'_1 sont donc suffixes. Définissons alors l'isomorphisme φ_1 par $\varphi_1(qgb) = fqb$. De même, notons $P_2, P'_2, Q_1, Q'_1, Q_2$ et Q'_2 les sous-monoïdes respectivement engendrés par $\{pfc/c\Gamma q\}, \{gpc/c\Gamma q\}, \{cgp/c\Gamma q\}, \{cpf/c\Gamma q\}, \{bfq/b\Gamma p\},$ et $\{bqg/b\Gamma p\}$ et $\varphi_2, \psi_1,$ et ψ_2 les isomorphismes définis par : $\varphi_2(pfc) = gpc,$ $\psi_1(cgp) = cpf$ et $\psi_2(bfq) = gpc$.

Prouvons que $uv \sim x$ si et seulement si $u \sim u_1 u_2 \alpha u_3 u_4, v \sim v_1 v_2 \beta v_3 v_4$ et $x \leftrightarrow u_1 v_1 m u_4 v_4,$ les conditions du lemme étant réalisées.

Pour montrer que la condition est suffisante, il suffit de vérifier que $m \sim u_2 v_2 \alpha \beta u_3 v_3$. Dans le cas (2) par exemple, en supposant $u_2 \neq 1$ et $v_3 \neq 1,$ posons $u_2 = qgb_1 qgb_2 \dots qgb_r$ avec $b_i \Gamma p$ et $v_3 = c_1 gpc_2 gp \dots c_s gp$ avec $c_i \Gamma q$. Par définition de φ_1 et $\psi_1,$ on a

$$m = pfqb_1 fqb_2 \dots fqb_r v_2 f u_3 c_1 pfc_2 pf \dots c_s pfq.$$

On en déduit $m \sim qgb_1 qgb_2 \dots qgb_r v_2 qfp u_3 c_1 gp \dots c_s gp.$

Le cas (3) se traiterait de même.

Montrons que la relation est nécessaire par récurrence sur la longueur d'une chaîne de relations élémentaires de uv à x . Si on n'a pas $uv \leftrightarrow x,$ soient y et t tels que $uv \sim y, y = l\varepsilon l', t = l\bar{\varepsilon} l'$ et $t \leftrightarrow x$. Par hypothèse de récurrence, on peut écrire $u \sim u_1 u_2 \alpha u_3 u_4, v \sim v_1 v_2 \beta v_3 v_4, y \leftrightarrow u_1 v_1 m u_4 v_4.$ En examinant de manière explicite l'expression de $u_2 \alpha u_3$ et $v_2 \beta v_3,$ on remarque que, si $\alpha\beta \neq 1$ on peut supposer $\alpha \neq 1$ et $\beta \neq 1,$ et que si $\alpha\beta = 1,$ on peut supposer $u_2 u_3 v_2 v_3 = m = 1.$

On peut écrire $l \leftrightarrow u'_1 v'_1 m' u'_4 v'_4, \varepsilon \leftrightarrow \delta_1 \lambda_1 c \delta_4 \lambda_4,$ et $l' \leftrightarrow u''_1 v''_1 m'' u''_4 v''_4$ avec $\delta_1 \Gamma v'_1 m' u'_4 v'_4, \lambda_1 \Gamma u''_1 m'' u''_4 v''_4, c \Gamma u'_1 v'_1 u'_4 v'_4, \delta_4 \Gamma u''_1 v''_1 m'' u''_4 v''_4,$ $\lambda_4 \Gamma u''_1 v''_1 m'' u''_4 v''_4, u_1 = u'_1 \delta_1 u'_1, v_1 = v'_1 \lambda_1 v'_1, m = m' c m'', u_4 = u'_4 \delta_4 u'_4$ et $v_4 = v'_4 \lambda_4 v'_4.$

1^{er} cas : $\varepsilon = c$. Alors $x \leftrightarrow u_1 v_1 m' \bar{\varepsilon} m'' u_4 v_4$. Supposant par exemple $m' \varepsilon m'' = m = p \varphi_1(u_2) v_2 f u_3 \psi_1(v_3) q,$ on obtient, compte tenu des hypothèses sur les chevauchements, et de $f \neq g : \varepsilon = pfq$ et $m' = 1$ (ou $m'' = 1$). Si $m' = 1$ et

$u_2 \neq 1$, on a $x \leftrightarrow \bar{u}_1 v_1 p \varphi_1 (\bar{u}_2) v_2 f u_3 \psi_1 (v_3) q$ avec $u_2 = qgb_1 \bar{u}_2$ et $\bar{u}_1 = u_1 qgb_1$.

Si $m' = 1$ et $u_2 = 1$, on a $v_2 u_3 v_3 = 1$ et $m = \varepsilon$.

2^e cas : $\delta_1 \lambda_1 \neq 1$ et $\delta_4 \lambda_4 \neq 1$. Les commutations $m' \Gamma \delta_1 \lambda_1$ et $m'' \Gamma \delta_4 \lambda_4$ impliquent $m' m'' = 1$. Donc $m = c$, ce qui n'est possible, d'après les expressions de m , que pour $m = c = 1$. On a donc $u_2 \alpha u_3 v_2 \beta v_3 = 1$. Par ailleurs, $u_4 \Gamma v_1$ implique $\lambda_1 = 1$ ou $\delta_4 = 1$, d'où :

$$x \leftrightarrow \underset{\theta}{u'_1 u'_4 v'_1 v'_4 \bar{\varepsilon} u''_1 u''_4 v''_1 v''_4} \quad \text{et} \quad u \sim u'_1 u'_4 \bar{\alpha} u''_1 u''_4, \quad v \sim v'_1 v'_4 \bar{\beta} v''_1 v''_4$$

avec

- $\bar{\alpha} = \delta_1 \delta_4, \bar{\beta} = \lambda_4$ si $\lambda_1 = 1$
- $\bar{\alpha} = \delta_1, \bar{\beta} = \lambda_1 \lambda_4$ si $\delta_4 = 1$.

3^e cas : $\delta_1 \lambda_1 \neq 1$ et $\delta_4 \lambda_4 = 1$. On a alors $\varepsilon = \delta_1 \lambda_1 c$ et $m = cm''$. Remarquons que si $\lambda_1 \neq 1$, on peut (par $v_1 \Gamma \alpha$) supposer $\alpha = 1$, et donc également $\alpha \beta = u_2 u_3 v_2 v_3 = m = 1$, et que l'on peut alors conclure comme dans le 2^e cas. Supposons donc $\lambda_1 = 1$ et $\varepsilon = \delta_1 c$.

Si $c = 1$, on a $x \leftrightarrow \underset{\theta}{u'_1 \bar{\varepsilon} u''_1 v_1 m u_4 v_4}$.

Sinon, c est un chevauchement de ε sur m , ce qui implique que $c = p$ ou q . Si par exemple $\varepsilon = qgp$ et $c = p$, on obtient $x \leftrightarrow \underset{\theta}{u'_1 u'_4 v'_1 v'_4 p f q u''_1 v''_1 m'' u''_4 v''_4}$, et en explicitant m'' :

$$x \leftrightarrow \underset{\theta}{u'_1 u'_4 v'_1 v'_4 p f q u''_1 v''_1 \varphi_1 (u_2) v_2 f u_3 \psi_1 (v_3) q u''_4 v''_4},$$

d'où

$$x \leftrightarrow \underset{\theta}{\bar{u}_1 \bar{v}_1 p f q u''_1 \varphi_1 (u_2) \bar{v}_2 f u_3 \psi_1 (v_3) q u''_4 v''_4}$$

en posant

$$\bar{u}_1 = u'_1 u'_4, \quad \bar{v}_1 = v'_1 v'_4, \quad \bar{v}_2 = v''_1 v_2.$$

Par ailleurs $qg u''_1 u_2 \in P_1$ et $\varphi_1 (qg u''_1 u_2) = f q u''_1 \varphi_1 (u_2)$. On obtient donc la forme cherchée pour x .

4^e cas : $\delta_1 \lambda_1 = 1$ et $\delta_4 \lambda_4 \neq 1$: ce cas se traite comme le précédent. \square

Le cas $p = 1, q = 1$ a été traité dans le lemme 3.1. Le cas $p = 1, q \neq 1$ se traite comme ci-dessus, en prenant

$$P_1 = P'_1 = Q_2 = Q'_2 = \{1\} \quad (\text{resp. } P_2 = P'_2 = Q_1 = Q'_1 = \{1\}).$$

Exemple : $A = \{a, b, c, d, i, j\}$, $R = (abcd, dcba)$, $\theta = \{(i, d), (j, a)\}$.
 On a donc $p = a$, $q = d$, $f = bc$, $g = cb$. Pour $u = abciabc$, $v = dcbdjbc$,
 $x = dcbaicbdcbjdcba$, on est dans le cas (3) avec $m = x$, $u_2 = abci$, $\varphi_2(u_2) = cbai$,
 $v_3 = dcbdjbc$, $\varphi_2(v_3) = dcbjdc$, $\alpha = abc$, $\beta = d$.

IV. CAS DE PLUSIEURS RÈGLES

La congruence est engendrée par θ et une famille finie R de couples (f, g) vérifiant $|f|_a = |g|_a$ pour tout a de A .

Dans toute la suite, on supposera que les alphabets de deux règles distinctes sont disjoints et que $\bigcup_{(f, g) \in R} \text{alph}(f)$ est une partie totalement dépendante de A .

Soit (f, g) un élément fixé de R , et $R' = R \setminus \{(f, g)\}$. On notera \equiv la congruence engendrée par θ et le couple (f, g) , et \sim la congruence engendrée par θ et R' .

LEMME 4.1 : Soient $x, y \in A^*$. Avec les hypothèses ci-dessus, on a $x \sim y$ si et seulement si il existe x' , tel que : $x \sim x'$, avec $x' \equiv y$.

Preuve : Il suffit de montrer que (dans une chaîne de relations élémentaires) on peut toujours « permuter » la relation $f = g$ avec la relation $f' = g'$ (pour $(f', g') \neq (f, g)$), c'est-à-dire : si $t \xleftrightarrow{\theta} l \varepsilon l'$, $l \bar{\varepsilon} l' \xleftrightarrow{\theta} n \varepsilon' n'$ et $n \bar{\varepsilon}' n' \xleftrightarrow{\theta} u$, alors on peut trouver $\tilde{l}, \tilde{l}', \tilde{n}, \tilde{n}'$ tels que : $t \xleftrightarrow{\theta} \tilde{l} \varepsilon' \tilde{l}'$, $\tilde{l} \bar{\varepsilon}' \tilde{l}' \xleftrightarrow{\theta} \tilde{n} \varepsilon \tilde{n}'$ et $\tilde{n} \bar{\varepsilon} \tilde{n}' \xleftrightarrow{\theta} u$.

De la relation $l \bar{\varepsilon} l' \xleftrightarrow{\theta} n \varepsilon' n'$ on déduit $l \xleftrightarrow{\theta} l_1 l_2 l_3$, $\bar{\varepsilon} = \delta_1 \delta_2 \delta_3$, $l' \xleftrightarrow{\theta} l'_1 l'_2 l'_3$ avec $n = l_1 \delta_1 l'_1$, $\varepsilon = l_2 \delta_2 l'_2$, $n' = l_3 \delta_3 l'_3$ et les relations de commutation habituelles. On doit avoir $\delta_2 = 1$ puisque $\text{alph}(\varepsilon) \cap \text{alph}(\varepsilon') = \emptyset$. Supposons $\delta_1 = 1$: comme $\delta_1 \Gamma l_2$, on doit avoir $l_2 = 1$, d'où $\varepsilon' = l'_2 \neq 1$, ce qui impose $\delta_3 = 1$ puisque $\delta_3 \Gamma l'_2$. On obtient $t \xleftrightarrow{\theta} l_1 l_3 \varepsilon l'_1 \varepsilon' l'_3$, ce qui montre clairement le résultat. On conclut de façon similaire en supposant $\delta_3 \neq 1$. \square

Exemple 4.2 : Si l'on suppose $f \Gamma f'$, la conclusion du lemme 4.1 peut ne pas être vérifiée :

soit $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, $R = \{(abc, bca), (def, edf)\}$ et les relations de commutations $abc \Gamma def$, $h \Gamma aef$, $g \Gamma bcd$. Posant $R' = \{(def, edf)\}$, on considère la chaîne de t à u suivante : $t = dgabchef \equiv dgbcahef \xleftrightarrow{\theta} dgbchefa \xleftrightarrow{\theta} u$

$gbc d h e f a \leftrightarrow g b c d e f h a \underset{\theta}{\sim} g b c e d f h a \underset{R'}{\sim}$. On ne peut pas trouver de chaîne de t à u utilisant la règle $(d e f, e d f)$ avant la règle $(a b c, b c a)$. \square

V. RECONNAISSABILITÉ DANS M

Le lemme préliminaire est très proche de ([3], p. 70, 12.5).

LEMME 5.1 : Soit $n > 1$ un entier fixé, et X une partie reconnaissable de A^* .

(1) $K_n[X] = \{(u_1, \dots, u_n) \in (A^*)^n / u_1 u_2 \dots u_n \in X\}$ est une partie reconnaissable de $(A^*)^n$.

(2) Si $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ sont des mots fixés de A^* , alors :

$$K_{\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}}[X] = \{(u_1, \dots, u_n) \in (A^*)^n / u_1 \alpha_1 \dots \alpha_{n-1} u_n \in X\}$$

est une partie reconnaissable de $(A^*)^n$.

Preuve : (1) Soit N un monoïde fini, $P \subset N$ et φ un homomorphisme de A^* dans N tel que $X = \varphi^{-1}(P)$. On construit l'homomorphisme ψ de $(A^*)^n$ dans N^n en posant $\psi(u_1, \dots, u_n) = (\varphi(u_1), \dots, \varphi(u_n))$. Si

$$E = \{(s_1, \dots, s_n) \in N^n / s_1 \dots s_n \in P\}$$

on a $K_n[X] = \psi^{-1}(E)$.

(2) Il suffit de remarquer que

$$K_{\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}}[X] = (1, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})^{-1} K_n[X]. \quad \square$$

LEMME 5.2 : Supposons que la relation \sim est engendrée par (θ, R) , où $R = \{(p f q, q g p)\}$ vérifie les conditions suivantes :

(1) $f \neq g$ et pour tout a de A , $|f|_a = |g|_a$.

(2) $\text{Alph}(p f q)$ est totalement dépendant.

(3) $(p f q, q g p)$ ne présente pas d'autre chevauchement que p et q . Si $X \subset A^*$ est tel que $[X]_\theta$ soit reconnaissable, alors $[X]$ est reconnaissable.

Preuve : Les notations seront celles de la preuve du lemme 3.2, concernant le cas $p \neq 1$ et $q \neq 1$. Cette preuve pourra être adaptée aux cas $p = 1$ (ou $q = 1$, ou $p = q = 1$) en identifiant certains monoïdes à $\{1\}$ (voir fin de la preuve du lemme 3.2).

Montrons que la famille des $u^{-1}[X]$, pour $u \in A^*$, est finie. Pour tout $u \in A^*$, notons :

$$\begin{aligned} \pi_1(u) &= \{((u_1, u_4)^{-1} K_2([X]_0), \text{alph}(u_4))/u \sim u_1 u_4\} \\ \pi_2(u) &= \{((u_1, \varphi_1(u_2), u_3, u_4)^{-1} K_{p, f, q}([X]_0), \text{alph}(u_2), \\ &\quad \text{alph}(u_3), \text{alph}(u_4), \alpha)/u \sim u_1 u_2 \alpha u_3 u_4 \\ &\quad \text{avec } \alpha\beta = qgp \text{ et } u_2 \in P_1\}, \\ \pi_3(u) &= \{((u_1, \varphi_2(u_2), u_3, u_4)^{-1} K_{q, g, p}([X]_0), \text{alph}(u_2), \\ &\quad \text{alph}(u_3), \text{alph}(u_4), \alpha)/u \sim u_1 u_2 \alpha u_3 u_4 \\ &\quad \text{avec } \alpha\beta = pfq \text{ et } u_2 \in P_2\}, \\ \text{et } \sigma(u) &= \{\pi_1(u), \pi_2(u), \pi_3(u)\}. \end{aligned}$$

$[X]_0$ étant reconnaissable, on sait (lemme 5.1) que $K_2([X]_0)$ est une partie reconnaissable de $(A^*)^2$, $K_{p, f, q}([X]_0)$ et $K_{q, g, p}([X]_0)$ deux parties reconnaissables de $(A^*)^4$. De plus, l'alphabet A est fini. On en déduit que la famille des $\sigma(u)$, pour u variant dans A^* est finie. Montrons que si $\sigma(u) = \sigma(t)$, alors $u^{-1}[X] = t^{-1}[X]$. Soit $v \in u^{-1}[X]$. Par hypothèse, $uv \in [X]$ implique $u \sim u_1 u_2 \alpha u_3 u_4$, $v \sim v_1 v_2 \beta v_3 v_4$, et $u_1 v_1 m u_4 v_4 \in [X]_0$, l'une des conditions (1), (2), (3) du lemme 3.2 étant satisfaite.

• Si (1) est vérifiée, $(u_1, u_4) (v_1, v_4) \in K_2([X]_0)$. Comme $\pi_1(u) = \pi_1(t)$, on en déduit que $t \sim t_1 t_4$, avec

$$(t_1, t_4) (v_1, v_4) \in K_2([X]_0) \quad \text{et} \quad \text{alph}(t_4) = \text{alph}(u_4).$$

On a donc $t_1 v_1 t_4 v_4 \in [X]_0$ et $t_4 \Gamma v_1$, ce qui implique $tv \in [X]$, et donc $v \in t^{-1}[X]$.

• Si (2) est vérifiée, $(u_1, \varphi_1(u_2), u_3, u_4) (v_1, v_2, \psi_1(v_3), v_4) \in K_{p, f, q}([X]_0)$. Comme $\pi_2(u) = \pi_2(t)$, on a $t \sim t_1 t_2 \alpha t_3 t_4$ avec

$$t_2 \in P_1, t_1 v_1 p \varphi_1(t_2) v_2 f t_3 \psi_1(v_3) q t_4 v_4 \in [X]_0$$

et $\text{alph}(t_2) = \text{alph}(u_2)$, $\text{alph}(t_3) = \text{alph}(u_3)$, $\text{alph}(t_4) = \text{alph}(u_4)$. On a donc

$$\begin{aligned} v_1 \Gamma t_2 \alpha t_3 t_4, & \quad t_4 \Gamma v_1 v_2 \beta v_3, \\ t_3 \Gamma v_2 \beta, & \quad v_2 \Gamma p, \quad t_3 \Gamma q. \end{aligned}$$

On en déduit $tv \in [X]$.

• Si (3) est vérifiée, on montre de même, en utilisant $\pi_3(u) = \pi_3(t)$ que $tv \in [X]$.

Finalement $\sigma(u) = \sigma(t)$ implique

$$u^{-1}[X] \subset t^{-1}[X],$$

donc $u^{-1}[X] = t^{-1}[X]$. \square

PROPOSITION 5.3 : *Supposons que \sim vérifie les propriétés suivantes :*

(1) *Les éléments de R sont de la forme (pfq, qgp) et vérifient les hypothèses du lemme 5.2;*

(2) *Deux éléments distincts de R ont des alphabets disjoints;*

(3) $\bigcup_{(pfq, qgp) \in R} \text{alph}(f)$ *est totalement dépendant.*

$(pfq, qgp) \in R$

Alors, si $X \subset A^$ est tel que $[X]_0$ soit reconnaissable, $[X]$ est reconnaissable.*

Preuve : Raisonnons par récurrence sur le nombre r de relations de R . Si $r=1$, on peut conclure par le lemme 5.2.

Si $r>1$, soit $(pfq, qgp) \in R$ et \sim la congruence engendrée par θ et R'
 $R' = R \setminus \{(pfq, qgp)\}$. La classe Y de X pour \sim est reconnaissable par hypothèse de récurrence. Par le lemme 4.1, $[X] = [Y]_{\equiv}$, en notant \equiv la congruence engendrée par θ et le couple (pfq, qgp) . On peut de nouveau conclure par le lemme 5.2 en remarquant que $Y = [Y]_0$. \square

De la proposition 5.3, et des propriétés de reconnaissabilités dans un monoïde partiellement commutatif (voir 2.2, [2], [6], [7]); on déduit les propriétés suivantes :

COROLLAIRE 5.4 : *Si \sim vérifie les hypothèses (1), (2) et (3) de la proposition 5.3, on a :*

(i) *Si X et Y sont deux parties reconnaissables de A^* telles que $X = [X]$ et $Y = [Y]$, alors $[XY]$ est une partie reconnaissable de A^* .*

(ii) *Si X est une partie reconnaissable de A^* telle que $X = [X]$ et si pour tout mot x de X le graphe des non-commutations associé à $\text{alph}(x)$ est connexe, alors $[X^*]$ est reconnaissable.*

(iii) *Si X est une partie reconnaissable de A^* telle que, pour tout facteur itératif h , le graphe des non-commutations associé à $\text{alph}(h)$ est connexe, alors $[X]$ est reconnaissable.*

BIBLIOGRAPHIE

1. R. CORI et D. PERRIN, Sur la reconnaissabilité dans les monoïdes partiellement commutatifs libres, *R.A.I.R.O. Inform. Théor. Appl.*, 1985, 19, p. 21-32.
2. R. CORI et Y. MÉTIVIER, Recognizable Subsets of Partially Abelian Monoids, *Theoret. Comput. Sci.*, 1985, 35, p. 179-189.
3. S. EILENBERG, Automata, languages and machines, *A*, Academic Press, 1974.

4. M. FLIESS, Matrices de Hankel, *J. Math. Pures Appl.*, 1974, 53, p. 197-224.
5. M. LOTHAIRE, Combinatorics on Words, *Addison-Wesley*, 1983.
6. Y. MÉTIVIER, Une condition suffisante de reconnaissabilité dans un monoïde partiellement commutatif, *R.A.I.R.O., Inform. Theor. Appl.*, 1986, 20, p. 121-127.
7. Y. MÉTIVIER, On Recognizable Subsets of Free Partially Commutative Monoids, *Theoret. Comput. Sci.*, 1988, 58, p. 201-208.
8. E. OCHMANSKI, Regular Behaviour of Concurrent Systems, *E.A.T.C.S. Bull.*, octobre 1985.