INFORMATIQUE THÉORIQUE ET APPLICATIONS

Z.-X. WEN
Z.-Y. WEN

Mots infinis et produits de matrices a coefficients polynomiaux

Informatique théorique et applications, tome 26, nº 4 (1992), p. 319-343.
<http://www.numdam.org/item?id=ITA_1992__26_4_319_0>

Informatique théorique et Applications/Theoretical Informatics and Applications
(vol. 26, n° 4, 1992, p. 319 à 343)

MOTS INFINIS ET PRODUITS DE MATRICES A COEFFICIENTS POLYNOMIAUX (*)

par Z.-X. WEN (1) et Z.-Y. WEN (2)

Communiqué par J.-E. PIN

Résumé. – *Dans ce travail, on introduit une classe de suites engendrées par un produit de matrices à coefficients polynomiaux, qui équivalent aux suites engendrées par une suite de substitutions. Comme corollaires, on établit des équations de Mahler généralisées pour ces suites, et on introduit une classe de suites automatiques.*

Abstract. – *In this paper, we introduce a class of sequences generated by a product of matrices the coefficients of which are polynomials. We prove that the sequences of this classe are equivalent to the sequences generated by substitutions. As corollaries, we establish generalized Mahler equations and we prove that the set of natural numbers is a disjoint union of different Fibonacci sequences.*

INTRODUCTION

Les suites automatiques et certaines généralisations ont été étudiées par de nombreux auteurs, par exemple *voir* [1], [2], [3], [4]. Ce travail consiste à établir, du point de vue des produits de matrices, une définition équivalente des suites engendrées par une substitution, et à étudier leurs propriétés.

Dans le paragraphe 1, on étudie la structure algébrique de produits d'une classe de matrices à coefficients polynomiaux, et ensuite, on introduit la notion de suites engendrées par ces produits de matrices. Le paragraphe 2 est consacré à établir des liens entre substitutions et produits de matrices. En utilisant les résultats du paragraphe 2, nous établissons des équations de Mahler généralisées pour les suites engendrées par produit de matrices qui généralisent celles des suites automatiques; comme exemple, nous discutons

(*) Reçu septembre 1990, accepté en septembre 1991.

(1) Université de Paris-Sud, Mathématiques, Bât. 425, 91405 Orsay Cedex, France et Département de Mathématiques, Université de Wuhan, 430072 Wuhan, Hubei, Chine.

(2) Centre Sino-Français de Mathématiques et d'Informatique, Université de Wuhan, 430072 Wuhan, Hubei, Chine.

0988-3754/92/04 319 25/$4.50/© AFCET-Gauthier-Villars

l'équation de Mahler de la suite de Fibonacci. Enfin, comme corollaire du résultat principal, on introduit une classe de suites automatiques.

1. SUITES ENGENDRÉES PAR UN PRODUIT DE MATRICES A COEFFICIENTS POLYNOMIAUX

1. Notations et préliminaires

Dans cet article, on adopte les notations suivantes :

$\mathbb{Z}[X]$: l'anneau des polynômes à coefficients dans $\mathbb{Z}$;

d : un entier positif $\geqq 2$;

$\mathbb{A}$: le sous-ensemble des polynômes de $\mathbb{Z}[X]$ à coefficients 0 ou 1;

B_d : le sous-ensemble de $\mathbb{Z}[X]^d$ défini par $\boldsymbol{P}(X) := (p_1(X), \ldots, p_d(X))^t \in B_d$, si et seulement si $\forall i, p_i(X) \in \mathbb{A}$ et ou bien $\boldsymbol{P}(X) = (0, \ldots, 0) =: \mathbf{0}$, ou bien

$$p(X) := \sum_{i=1}^{d} p_i(X) = \sum_{j=1}^{d(P(X))+1} X^{j-1},$$

où $d(\boldsymbol{P}(X)) = d(p(X)) = \sup_{1 \leqq i \leqq d} \deg(p_i(X))$ est le degré du polynôme $\boldsymbol{P}(X)$.

$\mathscr{M}_d$: l'ensemble des matrices d'ordre d dont chaque colonne est dans B_d.

$[M]_{ij}$: l'élément d'indice (i,j) de la matrice M.

$E = \{e_1, \ldots, e_d\}$, avec $e_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)^t$.

$\mathscr{B}_d = \Big\{ \boldsymbol{P}(X) = (p_1(X), \ldots, p_d(X))^t$; pour tout i, $p_i(X)$ est une série formelle à coefficients dans $\{0, 1\}$ et $p(X) = \sum_{i=1}^{d} p_i(X) = \sum_{n \geqq 0} X^n \Big\}$.

On munit B_d de l'opération binaire « $\oplus$ » de la façon suivante : Pour $\boldsymbol{P}(X)$, $\boldsymbol{Q}(X) \in B_d$, on définit

$$\boldsymbol{P}(X) \oplus \boldsymbol{Q}(X) = \boldsymbol{P}(X) + \boldsymbol{Q}(X) . X^{d(\boldsymbol{P}(X))+1} \tag{1}$$

et on fait la convention $d(\mathbf{0}) = -1$.

Il est facile de vérifier que $(B_d, \oplus)$ est un monoïde avec $\mathbf{0} = (0, \ldots, 0)^t$ comme élément neutre. De plus si $\boldsymbol{P}(X) = (p_1(X), \ldots, p_d(X))^t \in B_d$, on a

$$\boldsymbol{P}(X) = \sum_{i=1}^{d} p_i(X) e_i. \tag{2}$$

D'autre part, on voit facilement que chaque élément $\boldsymbol{P}(\neq 0)$ de B_d peut être engendré par des éléments de E, c'est-à-dire

$$\boldsymbol{P}=\bigoplus_{j=1}^{d(\boldsymbol{P})+1} u_j=\sum_{j=1}^{d(\boldsymbol{P})+1} u_j X^{j-1} \tag{3}$$

où $u_j \in E$. En effet, on peut vérifier que, si X^{j-1} paraît dans p_i, alors $u_j=e_i$.

Soit $\delta_i(e_j)=\delta_{ij}$, $1 \leqq i, j \leqq d$, en comparant (2) et (3), on obtient

$$p_i=\sum_{j=1}^{d(\boldsymbol{P})+1} \delta_i(u_j) X^{j-1}. \tag{4}$$

2. Les endomorphismes de $(B_d, \oplus)$ et leurs matrices représentatives

Supposons maintenant $h \in \operatorname{End}(B_d, \oplus)$, par (2),

$$h(e_i)=\sum_{j=1}^{d} p_{ji} e_j=(p_{1i}, \ldots, p_{di})^t=: \boldsymbol{P}_i, \qquad 1 \leqq i \leqq d, \tag{5}$$

Par conséquent, l'endomorphisme h détermine une matrice $M(h) \in \mathscr{M}_d$,

$$M(h)=\begin{pmatrix} p_{11} \cdots p_{1d} \\ \cdots \quad \cdots \\ p_{d1} \cdots p_{dd} \end{pmatrix}=:(\boldsymbol{P}_1, \ldots, \boldsymbol{P}_d) \tag{6}$$

Inversement, étant donnée une matrice $M \in \mathscr{M}_d$, on définit une application $h: \mathrm{E} \rightarrow B_d$ par (5) et (6) et puis, on prolonge h à B_d par $h(\oplus u_j)=\oplus h(u_j)$ où $u_j \in E$. Donc, l'application $M: \operatorname{End}(B_d, \oplus) \rightarrow \mathscr{M}_d$ est surjective, de plus, on voit facilement qu'elle est injective, on a alors

LEMME 1 : *L'application $M: \operatorname{End}(B_d, \oplus) \rightarrow \mathscr{M}_d$, $h \rightarrow M(h)$ est bijective.*

Soit N, M deux matrices de $\mathscr{M}_d$ avec

$$N e_i=\sum_{j=1}^{d(N e_i)+1} e_{ji} X^{j-1}, \qquad 1 \leqq i \leqq d, \quad e_{ji} \in E.$$

Une matrice $N_M=(N_M e_1, \ldots, N_M e_d)$ sera définie de la façon suivante :

$$N_M e_i=\sum_{j=1}^{d(N e_i)+1} e_{ji} X^{j-1+s_{ji}}, \qquad 1 \leqq i \leqq d, \tag{7}$$

où

$$s_{ji}:=\sum_{k=0}^{j-1} d(M\,e_{ki}),\qquad 1\leqq j\leqq d(N\,e_i)+1,\qquad \text{et}\qquad d(M\,e_{0i}):=0. \tag{8}$$

Puis on définit une multiplication « $\oplus$ » sur $\mathcal{M}_d$ par

$$M\otimes N=M\,.\,N_M$$

On verra que $(\mathcal{M}_d, \otimes)$ est un monoïde et que l'application M du lemme 1 est un isomorphisme.

Exemple 1 : Soient

$$M=\begin{pmatrix} x & 0 & 0\\ 0 & 1+x & 1\\ 1+x^2 & 0 & x\end{pmatrix},\qquad N=\begin{pmatrix} 1 & x & x^2\\ x & x^2 & 1\\ x^2 & 1 & x\end{pmatrix}.$$

Alors

$$\begin{array}{llll} N\,e_1=e_1+e_2\,x+e_3\,x^2, & e_{11}=e_1, & e_{21}=e_2, & e_{31}=e_3;\\ N\,e_2=e_3+e_1\,x+e_2\,x^2, & e_{12}=e_3, & e_{22}=e_1, & e_{32}=e_2;\\ N\,e_3=e_2+e_3\,x+e_1\,x^2, & e_{13}=e_2, & e_{23}=e_3, & e_{33}=e_1; \end{array}$$

$$d(M\,e_1)=2,\qquad d(M\,e_2)=d(M\,e_3)=1,$$

$$d(N\,e_1)=d(N\,e_2)=d(N\,e_3)=2,$$

$$s_{11}=0,\qquad s_{21}=2,\qquad s_{31}=3;$$

$$s_{12}=0,\qquad s_{22}=1,\qquad s_{32}=3;\qquad s_{13}=0,\qquad s_{23}=1,\qquad s_{33}=2.$$

Donc,

$$N_M\,e_1=e_1+e_2\,x^3+e_3\,x^5=(1, x^3, x^5)^t,$$

$$N_M\,e_2=e_3+e_1\,x^2+e_2\,x^5=(x^2, x^5, 1)^t,$$

$$N_M\,e_3=e_2+e_3\,x^2+e_1\,x^4=(x^4, 1, x^2)^t,$$

$$M\otimes N=M\,.\,N_M=\begin{pmatrix} x & 0 & 0\\ 0 & 1+x & 1\\ 1+x^2 & 0 & x\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & x^2 & x^4\\ x^3 & x^5 & 1\\ x^5 & 1 & x^2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} x & x^3 & x^5\\ x^3+x^4+x^5 & 1+x^5+x^6 & 1+x+x^2\\ 1+x^2+x^6 & x+x^2+x^4 & x^3+x^4+x^6\end{pmatrix}$$

Remarque 1 : On donne dans la suite un autre algorithme, plus simple, de calcul de N_M.

Soit $M(X)$, $N(X) \in \mathscr{M}_d$, donc

$$M(X) = (M_1(X), \ldots, M_d(X)) = (m_{ij}(X))_{1 \leqq i,\, j \leqq d},$$
$$N(X) = (N_1(X), \ldots, N_d(X)) = (n_{ij}(X))_{1 \leqq i,\, j \leqq d},$$

avec $M_j(X), N_j(X) \in B_d$, $1 \leqq j \leqq d$.

Soit

$$M_j(X) = \sum_{i=1}^{d} m_{ij}(X) = \sum_{l=1}^{d(M_j(X))+1} X^{l-1}$$

Pour chaque monôme X^l, on définit un vecteur

$$v_j^l := (v_{1j}^l, \ldots, v_{ij}^l, \ldots, v_{dj}^l)^t,$$

où

$$v_{ij}^l = \begin{cases} \#\{t;\, 1 \leqq t \leqq l,\, X^t \in m_{ij}(X)\}, & \text{si } X^l \notin m_{ij}(X); \\ \#\{t;\, 1 \leqq t \leqq l,\, X^t \in m_{ij}(X)\} - 1, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Avec cette notation, si $X^l \in M_j(X)$, alors X^l peut s'écrire X^c, où $c = \mathbf{1}_d v_j^l$ et $\mathbf{1}_d = (1, \ldots, 1)$.

Soient M, N deux matrices de $\mathscr{M}_d$, alors

$$N(X)_{M(X)} = N(X^M),$$

où $N(X^M)$ est obtenu en remplaçant chaque monôme X^l de $N_j(X)$ de N par $X^{c(M)}$ et $c(M) = \mathbf{1}_d\, M(1)\, v_j^l$.

Prenons M et N comme dans l'exemple 1, alors, des calculs directs donnent

$$N = \begin{pmatrix} X^{\mathbf{1}(0,0,0)^t} & X^{\mathbf{1}(0,0,1)^t} & X^{\mathbf{1}(0,1,1)^t} \\ X^{\mathbf{1}(1,0,0)^t} & X^{\mathbf{1}(1,0,1)^t} & X^{\mathbf{1}(0,0,0)^t} \\ X^{\mathbf{1}(1,1,0)^t} & X^{\mathbf{1}(0,0,0)^t} & X^{\mathbf{1}(0,1,0)^t} \end{pmatrix}$$

D'autre part

$$M(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc, on obtient la même N_M que dans l'exemple 1.

De la même façon, on a

$$M(X)=\begin{pmatrix} X^{1\,(0,\,0,\,1)^t} & 0 & 0 \\ 0 & X^{1\,(0,\,0,\,0)^t}+X^{1\,(0,\,1,\,0)^t} & X^{1\,(0,\,0,\,0)^t} \\ X^{1\,(0,\,0,\,0)^t}+X^{1\,(1,\,0,\,1)^t} & 0 & X^{1\,(0,\,1,\,0)^t} \end{pmatrix},$$

$$N(1)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad M(X)_{N(X)}=M(X^N)=\begin{pmatrix} X^3 & 0 & 0 \\ 0 & 1+X^3 & 1 \\ 1+X^6 & 0 & X^3 \end{pmatrix}.$$

Remarque 2 : Les discussions ci-dessus peuvent être généralisées aux matrices dont chaque colonne est dans $\mathscr{M}_d$.

LEMME 2 : *Soient h, $g \in \mathrm{End}(B_d, \oplus)$, alors*

$$M(hg)=M(h)\,M_h(g)$$

où $M_h(g):=M(g)_{M(h)}$ est défini comme dans (7).

Démonstration : Soit

$$M(h)=\begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1d} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{d1} & \cdots & p_{dd} \end{pmatrix}$$

et soit

$$M(g)\,e_i=g(e_i)=\bigoplus_{j=1}^{d(g(e_i))+1} e_{ji}, \qquad 1 \leqq i \leqq d.$$

Donc par (1), (4), (5), (7) et (8)

$$\begin{aligned} M(hg)\,e_i=hg(e_i) &= \bigoplus_{j=1}^{d(g(e_i))+1} h(e_{ji}) = \sum_{j=1}^{d(g(e_i))+1} h(e_{ji})\,X^{S_{ji}+j-1} \\ &= \sum_{j=1}^{d(g(e_i))+1} \left(\sum_{l=1}^{d} \delta_l(e_{ji})\,h(e_l)\right) X^{S_{ij}+j-1} \\ &= \sum_{j=1}^{d(g(e_i))+1} \sum_{l=1}^{d} \delta_l(e_{ji}) \left(\sum_{k=1}^{d} p_{kl}\,e_k\right) X^{S_{ij}+j-1}. \quad (10) \end{aligned}$$

D'autre part, d'après la définition de $M_h(g)$, nous avons

$$M_h(g)\,e_i = \sum_{j=1}^{d(g(e_i))+1} e_{ji}\,X^{s_{ji}+j-1}$$
$$= \sum_{j=1}^{d(g(e_i))+1} \left(\sum_{l=1}^{d} \delta_l(e_{ji})\,e_l\right) X^{s_{ji}+j-1} = \sum_{l=1}^{d}\left(\sum_{j=1}^{d(g(e_i))+1} \delta_l(e_{ji})\,X^{s_{ji}+j-1}\right) e_l.$$

Donc,

$$M(h)\,M_h(g)\,e_i = \sum_{k=1}^{d}\left(\sum_{l=1}^{d}\left(\sum_{j=1}^{d(g(e_i))+1} \delta_l(e_{ji})\,X^{s_{ji}+j-1}\right) p_{kl}\right) e_k. \qquad (11)$$

et le lemme 2 en découle en comparant (10) et (11).

Soient $M_1,\ M_2 \in \mathscr{M}_d$, par le lemme 1, il existe $h_1,\ h_2 \in \mathrm{End}(B_d, \otimes)$, tels que $M_1 = M(h_1)$ et $M_2 = M(h_2)$, si l'on définit $M_1 \otimes M_2 = M(h_1)\,M_{h_1}(h_2)$, alors d'après le lemme 2, $M_1 \otimes M_2 = M(h_1 h_2) \in \mathscr{M}_d$. Donc pour l'opération de la multiplication « $\otimes$ », $\mathscr{M}_d$ est un monoïde dont l'élément neutre est la matrice unité I. Par les lemmes 1 et 2, on obtient la proposition suivante

PROPOSITION 1 : *L'application* $M : \mathrm{End}(B_d, \oplus) \to (\mathscr{M}_d, \otimes)$ *est un isomorphisme de monoïdes.*

COROLLAIRE 1 : *Supposons* $h_k \in \mathrm{End}(B_d, \oplus)$, $1 \leqq k \leqq n$, *et posons* $H_j = \prod_{k=1}^{j} h_k$, *alors*

$$M(H_n) = \prod_{k=1}^{j} M_{H_{k-1}}(h_k) \qquad (12)$$

où $H_0 := \mathrm{id}$, $M_0 := I$.

En particulier, si $h \in \mathrm{End}(B_d, \oplus)$, *et* $h^0 := \mathrm{id}$, *alors*

$$M(h^n) = \prod_{k=1}^{n} M_{h^{k-1}}(h) \qquad (13)$$

Maintenant, nous étudions le problème réciproque. Nous allons en effet établir la proposition suivante :

PROPOSITION 2 : *Soient* M_1 *une matrice de* $\mathscr{M}_d$ *et* M_2 *une matrice à coefficients dans* $\mathbb{A}$, *telles que le produit* $M_1 M_2$ *soit dans* $\mathscr{M}_d$, *alors il existe*

$h_1, h_2 \in \mathrm{End}(\mathrm{B}_d, \oplus)$, *tels que*

$$M(h_1 h_2) = M_1 M_2 \qquad et \qquad M_{h_1}(h_2) = M_2.$$

Démonstration : D'après la proposition 1, il existe un couple unique $h, h_1 \in \mathrm{End}\,(B_d, \oplus)$, tels que $M(h_1) = M_1$ et $M(h) = M_1 M_2$. Posons

$$M_1 = (\boldsymbol{P}_1, \ldots, \boldsymbol{P}_d) = \begin{pmatrix} p_{11} & \ldots & p_{1d} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ p_{d1} & \ldots & p_{dd} \end{pmatrix}, \qquad M_2 = (\boldsymbol{Q}_1, \ldots, \boldsymbol{Q}_d) = \begin{pmatrix} q_{11} & \ldots & q_{1d} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ q_{d1} & \ldots & q_{dd} \end{pmatrix},$$

$$M_1 M_2 = (\boldsymbol{R}_1, \ldots, \boldsymbol{R}_d) = \begin{pmatrix} r_{11} & \ldots & r_{1d} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ r_{d1} & \ldots & r_{dd} \end{pmatrix}.$$

On va chercher un endomorphisme h_2 tel que $M(h_1 h_2) = M_1 M_2$ et $M_{h_1}(h_2) = M_2$.

Comme $M_1 M_2 \in \mathscr{M}_d$,

$$\sum_{k=1}^{d} r_{ki} = \sum_{j=1}^{D(i)+1} X^{j-1},$$

où $D(i) := d(M_1 M_2 e_i)$. D'autre part,

$$\sum_{k=1}^{d} r_{ki} = \sum_{k=1}^{d} \left(\sum_{l=1}^{d} p_{kl} q_{li} \right) = \sum_{l=1}^{d} \left(\sum_{k=1}^{d} p_{kl} q_{li} \right) = \sum_{l=1}^{d} \left(\sum_{j=1}^{d(l)+1} X^{j-1} \right) q_{li},$$

où $d(l) := d(M_1 e_l)$. On en déduit que

$$\sum_{j=1}^{D(i)+1} X^{j-1} = \sum_{l=1}^{d} \left(\sum_{j=1}^{d(l)+1} X^{j-1} \right) q_{li}. \tag{14}$$

En comparant les deux membres de l'égalité ci-dessus, on voit que 1 ne paraît que dans un $q_{t_1 i}$, où $1 \leqq t_1 \leqq d$. On obtient donc par (14) :

$$\sum_{j=1}^{D(i)-d(t_1)} X^{d(t_1)+j} = \sum_{l=1}^{d} \sum_{j=1}^{d(l)+1} X^{j-1} q_{li} - \sum_{j=1}^{d(t_1)+1} X^{j-1}.$$

Pour la même raison que précédemment, il existe un entier t_2, tel que $X^{d(t_1)}$ soit dans $q_{t_2 i}$.

Continuant ce procédé, nous obtenons une suite finie t_j, telle que, pour chaque j, $X^{s(d(j))}$ $\left(\text{où } s(d(j)) := \left(\sum_{k=1}^{j} d(t_k)\right) + j\right)$ soit dans q_{j+1i}.

Soit $\lambda(i)$ le nombre de monômes non nuls apparaissant dans Q_i, on définit un endomorphisme h_2 comme suit :

$$h_2(e_i) = \bigoplus_{j=1}^{\lambda(i)} e_{t_j}. \tag{15}$$

Ensuite, par des calculs analogues à ceux du lemme 2 et par (15), on peut voir que

$$M(h_1 h_2) = M_1 M_2 \qquad \text{et} \qquad M_2 = M_{h_1}(h_2).$$

La proposition est alors établie.

3. Suites engendrées par des produits de matrices

PROPOSITION 3 : *Soit $(M_k)_{k \geqq 1}$ une suite de matrices à coefficients dans $\mathbb{Z}[X]$ satisfaisant les conditions suivantes* :

(H$_1$) $\forall n \geqq 1,\ N_n := \prod_{k=1}^{n} M_k \in \mathscr{M}_d$,

(H$_2$) $\forall n \geqq 1$, *le terme constant* 1 *paraît dans* $[M_n]_{11}$.

Alors, la limite de $N_n e_1$ existe quand n tend vers l'infini et on la note $N_\omega e_1$.

Démonstration : Par la condition (H$_1$), N_n, $N_{n+1} \in \mathscr{M}_d$, donc, par l'égalité

$$[N_{n+1}]_{i1} = \sum_{j=1}^{d} [N_n]_{ij} [M_{n+1}]_{j1}, \qquad 1 \leqq i \leqq d,$$

et par la condition (H$_2$), les $d([N_{n+1}]_{i1})$ premiers termes du polynôme $[N_{n+1}]_{i1}$ constituent exactement le polynôme $[N_n]_{i1}$ pour tout $1 \leqq i \leqq d$. (Autrement dit, le vecteur de polynômes $N_n e_1$ est un « préfixe » du vecteur $N_{n+1} e_1$). Ceci démontre la proposition.

Remarque 3 : Si l'on suppose, pour tout $k \geqq 1$, que $[M_k]_{ii}$ contient le terme constant 1, alors

$$\lim_{n \to \infty} N_n e_i = N_\omega e_i$$

existe, $1 \leqq i \leqq d$. En particulier, si pour tout $k \geqq 1$ et tout $1 \leqq i \leqq d$, $[M_k]_{ii}$ contient 1, alors la limite

$$\lim_{n \to \infty} N_n = N_\omega$$

existe.

Remarque 4 : Sous les hypothèses de la proposition 3, $N_\omega e_1 \in \mathscr{B}_d$.

Remarque 5 : (*a*) Soit $(h_n)_{n \geqq 1}$ une suite de End $(B_d, \oplus)$ et quel que soit $n \in \mathbb{N}$,

$$h_n(e_1) = e_1 \oplus w_n,$$

où $w_n \in B_d$. Posons $H_n = \prod_{k=1}^{n} h_k$. On vérifie sans peine que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le polynôme $H_n(e_1)$ est préfixe du polynôme $H_{n+1}(e_1)$. Donc, quand n tend vers l'infini, la limite $H_n(e_1)$ existe et est dans $\mathscr{B}_d$. On la note $H_\omega(1)$.

(*b*) En particulier, si $h_n = h$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $h(e_1) = e_1 \oplus w$, $w \in B_d$, alors

$$h^\omega(e_1) := \lim_{n \to \infty} h^n(e_1)$$

existe. De plus, étant donné $u = \bigoplus_{n \geqq 1} u_n \in \mathscr{B}_d$, $u_n \in E$, on définit

$$h\Big(\bigoplus_{n \geqq 1} u_n\Big) = \bigoplus_{n \geqq 1} h(u_n),$$

alors, on peut prolonger h de B_d dans $\mathscr{B}_d$ de la façon précédente. Soit $u = h^\omega(e_1)$, on constate facilement que $h(u) = u$. Dans ce cas, on dit que u est un point fixe de h.

(*c*) Soit $h_n \in \operatorname{End}(B_d, \oplus)$ et soit $M(h_n)$ la matrice représentative de h_n. Alors 1 paraît dans $[M(h_n)]_{11} \Leftrightarrow h_n(e_1) = e_1 w_n$, $w_n \in B_d$. Avec les notations précédentes, nous avons

$$H_\omega(e_1) = \lim_{n \to \infty} H_n(e_1) = \lim_{n \to \infty} N_n e_1 = \lim_{n \to \infty} \left(\prod_{k=1}^{n} M_k(h_k) \right) e_1 = N_\omega e_1.$$

Sous les hypothèses de la proposition 3,

$$(1, \ldots, d) \lim_{n \to \infty} N_n e_1 = (1, \ldots, d) N_\omega e_1$$

définit une série formelle à coefficients dans l'ensemble $\{1, \ldots, d\}$, et ses coefficients définissent une suite $(a_n)_{n \geqq 1}$ composée de $1, \ldots, d$ qu'on appellera la suite engendrée par le produit des matrices $(M_n)_{n \geqq 1}$.

(1) Si la suite $(M_n)_{n \geqq 1}$ ne satisfait que les hypothèses (H_1) et (H_2), on dira que la suite $(a_n)_{n \geqq 0}$ précédente est engendrée par un produit de matrices du type I.

(2) On fait l'hypothèse suivante :

(H_3) $M_1 \in \mathscr{M}_d$, *le terme constant* 1 *est dans* $[M_1]_{11}$.

Par la proposition 1, il existe $h \in \operatorname{End}(B_d, \oplus)$, tel que $M(h) = M_1$. Définissons $M_n := M_{h^{n-1}}(h)$, $n \geqq 2$, par le corollaire 1, nous avons $M(h^n) = \prod_{k=1}^{n-1} M_k \in \mathscr{M}_d$, donc l'hypothèse (H_1) est satisfaite.

D'autre part, on peut vérifier que, pour tout $n \geqq 1$, 1 paraît dans $[M_n]_{11}$; il en résulte que l'hypothèse (H_2) est automatiquement satisfaite. Dans ce cas, on dira que la suite $(a_n)_{n \geqq 1}$ est engendrée par un produit de matrices du type II.

(3) Sous l'hypothèse (H_3), on suppose de plus :

$$d(M_1 e_1) = \ldots = d(M_1 e_d) = q$$

où q est un entier positif. Donc, pour tout $1 \leqq i \leqq d$, $d(h(e_i)) = q - 1$. Par la définition de s_{ji} [*voir* (8)], on obtient facilement

$$s_{ji} + j - 1 = jq^{n-1} \qquad \text{[ici, } M = M(h),\ N = M(h^{n-1}) \text{ dans (8)].}$$

On en déduit

$$M_n(X) := M_{h^{n-1}}(h)(X) = M_1(X^{q^{n-1}}).$$

On dira alors que la suite $(a_n)_{n \geqq 1}$ est engendrée par un produit de matrices du type III.

2. LIENS ENTRE SUBSTITUTIONS ET PRODUITS DE MATRICES, LES RÉSULTATS PRINCIPAUX

Soit Σ un ensemble fini qu'on appelle alphabet et les éléments de Σ^k sont appelés mots de longueur k ($k \geqq 1$). On convient que $\Sigma^0 = \{\varnothing\}$ est l'ensemble dont le seul élément est le mot vide. On pose

$$\Sigma^* = \bigcup_{k \geqq 0} \Sigma^k$$

l'ensemble Σ^* est muni de l'opération de concaténation. Si $m_1, \ldots, m_\nu$ sont des mots, on pose

$$\overset{\nu}{\underset{i=1}{\subset}} m_i = m_1 \ldots m_\nu \in \Sigma^*$$

Remarquons que, sous cette opération, Σ^* est un monoïde libre dont l'élément neutre est $\varnothing$.

La longueur du mot u est notée $|u|$.

Plus généralement, on pourra considérer des concaténations infinies

$$\underset{i \geqq 1}{\subset} m_i = m_1 m_2 \ldots \in \Sigma^{\mathbb{N}}.$$

Soit σ une application $\Sigma \to \Sigma^*$. On prolonge σ en une application $\Sigma^{\mathbb{N}} \to \Sigma^{\mathbb{N}}$ notée encore σ, définie comme suit : Si $x = (x_n) \in \Sigma^{\mathbb{N}}$, alors

$$\sigma(x) = \underset{i \geqq 1}{\subset} \sigma(x_i) \in \Sigma^{\mathbb{N}},$$

σ s'appelle une substitution sur Σ. Si pour tout $a \in \Sigma$, $|\sigma(a)| = k$, σ est appelée une k-substitution. On peut considérer aussi σ comme un endomorphisme de Σ^*.

Un élément $s \in \Sigma^{\mathbb{N}}$ est dit point fixe de la substitution si $\sigma(s) = s$.

On sait que, si $\sigma(a) = aw$, $w \in \Sigma^*$, alors

$$\sigma^{\omega}(a) := \lim_{n \to \infty} \sigma^n(a)$$

définit une suite qui est point fixe de σ (*voir* par exemple [2]).

Soit $\mathbb{E}$ un ensemble fini et soit $\tau : \Sigma \to \mathbb{E}$. Si la suite $s \in \Sigma^{\mathbb{N}}$ est engendrée par une substitution, on dit que la suite $\tau(s) = (\tau(s_n))_{n \geqq 0} \in \mathbb{E}^{\mathbb{N}}$ est elle aussi engendrée par une substitution.

Enfin, si $(\sigma_n)_{n \geqq 1}$ est une suite substitutive sur Σ satisfaisant $\sigma_n(a) = aw_n$, $w_n \in \Sigma^*$, alors $\prod_{n \geqq 1} (\sigma_n)(a)$ définit une suite $(t_n)_{n \geqq 0}$, qu'on appelle la suite engendrée par la suite de substitutions $(\sigma_n)_{n \geqq 1}$.

Soit $\Sigma = \{1, \ldots, d\}$ un alphabet. On définit l'application $\lambda : \Sigma \to B_d$, par $i \to e_i$, et on la prolonge en une application de Σ^* dans B_d, encore notée λ, de la façon suivante : pour tout u, $v \in \Sigma^*$,

$$\lambda(uv) = \lambda(u) \oplus \lambda(v) = \lambda(u) + \lambda(v) X^{|u|} \tag{16}$$

Il est facile de vérifier que λ est un isomorphisme (de monoïdes) entre $(\Sigma^*, \subset)$ et $(B_d, \oplus)$.

En particulier, si

$$P=(p_1, \ldots, p_d)=\sum_{j=0}^{d(P)} X^j u_j=\bigoplus_{j=0}^{d(P)} u_j,$$

où $u_j=e_i$ si X^j est dans p_i, on obtient

$$\lambda^{-1}(P)=a_0 a_1 \ldots a_{d(P)} \tag{17}$$

où $a_j=i$ si $u_j=e_i$.

Soit θ une substitution sur Σ, le diagramme commutatif suivant induit un endomorphisme h_θ de B_d.

$$\begin{tikzcd}
\Sigma^* \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\theta"'] & B_d \arrow[r, "\lambda^{-1}"] \arrow[d, "h_\theta"] & \Sigma^* \arrow[d, "\theta_{h_\theta}=\theta"] \\
\Sigma^* \arrow[r, "\lambda"] & B_d \arrow[r, "\lambda^{-1}"] & \Sigma^*
\end{tikzcd}$$

Figure 1.

Remarque 6 : $\theta(1)=1\,w,\ w\in\Sigma^* \Leftrightarrow h_\theta(e_1)=e_1\oplus w,\ w\in B_d$.

Soit $M(h_\theta)=(P_1, \ldots, P_d)$ la matrice représentative de h_θ, alors

$$\lambda\theta(1)=h_\theta\lambda(1)=h_\theta(e_1)=M(h_\theta)\,e_1,$$

d'où

$$\theta(1)=\lambda^{-1} M(h_\theta)\,e_1 \tag{18}$$

Par (17) et les discussions du paragraphe 1.3, on déduit que le second membre de (18) n'est autre que la suite engendrée par la matrice $M(h_\theta)$.

Soit $(\theta_n)_{n\geq 1}$ une suite de substitutions sur Σ satisfaisant l'hypothèse suivante :

(H_4) $\theta_n(1)=1\,w_n$, $w_n\in\Sigma^*$, $n\geq 1$, *et soient* h_{θ_n}, *les endomorphismes induits par les* θ_n.

Posons $\Theta_n := \prod_{k=1}^{n} \theta_k$, alors $H_{\Theta_n} = \prod_{k=1}^{n} h_{\theta_k}$, est l'endomorphisme induit par Θ_n. Par le corollaire 1,

$$N_n := M(H_{\Theta_n}) = \prod_{k=1}^{n} M_{H_{\Theta_{k-1}}}(h_{\theta_k}).$$

On a donc de (18)

$$\Theta_n(1) = \lambda^{-1} H_{\Theta_n}(e_1) = \lambda^{-1} N_n e_1.$$

Soient

$$\Theta(1) := \lim_{n \to \infty} \Theta_n(1), \qquad H(e_1) = \lim_{n \to \infty} H_{\Theta_n}(e_1), \qquad M(H) e_1 = \lim_{n \to \infty} N_n e_1.$$

On sait que toutes les limites existent si l'hypothèse (H_4) est satisfaite.

Soit $t = (t_n)_{n \geqq 0} \in \Sigma^{\mathbb{N}}$, on prolonge λ en une application de $\Sigma^{\mathbb{N}}$ dans $\mathscr{B}_d$ en posant $\lambda(t) = \bigoplus_{n \geqq 0} \lambda(t_n)$. On obtient donc finalement

$$\Theta(1) = \lambda^{-1} H(e_1) = \lambda^{-1} M(H) e_1 \tag{19}$$

C'est-à-dire, si une suite $(t_n)_{n \geqq 0}$ est engendrée par une suite de substitutions $(\theta_n)_{n \geqq 1}$ satisfaisant l'hypothèse (H_4), alors elle est aussi engendrée par produit d'une suite de matrices satisfaisant (H_1) et (H_2).

Inversement, si l'on donne une suite de matrices $(M_n)_{n \geqq 0}$ possédant les propriétés (H_1) et (H_2), alors, il existe une suite d'endomorphismes $(h_n)_{n \geqq 0}$ satisfaisant l'hypothèse (H_3), et par conséquent, une suite de substitutions $(\theta_n)_{n \geqq 1}$ sur Σ satisfaisant l'hypothèse (H_4); à des notations près, on a une formule analogue à (18). Ainsi, on a établit le théorème suivant :

THÉORÈME 1 : *Soit* $\mathbb{E}$ *un ensemble fini non vide, soit* $t = (t_n)_{n \geqq 0} \in \mathbb{E}^{\mathbb{N}}$, *les deux propriétés suivantes sont équivalentes* :

(i) *La suite t est engendrée par une suite de substitutions*;

(ii) *t est engendrée par un produit de matrices du type* I.

En utilisant la remarque 3 du paragraphe 1.3 on obtient aussi

THÉORÈME 1' : *Sous les mêmes hypothèses que dans le théorème* 1, *les deux propriétés suivantes sont équivalentes* :

(i) *t est engendrée par une substitution*;

(ii) *t est engendrée par un produit de matrices du type* II.

THÉORÈME 1'' : *Sous les mêmes hypothèses que dans le théorème* 1, *les deux propriétés suivantes sont équivalentes* :

(i) *t est engendrée par une k-substitution;*

(ii) *t est engendrée par un produit de matrices du type* III.

Exemple 2 : Soient θ, σ deux substitutions sur Σ avec $\sigma(i)=a_{1i}\ldots a_{|\sigma(i)|i}$, et soient h, g les endomorphismes sur $(B_d, \oplus)$ induits par θ et σ avec M, N leurs matrices représentatives. Alors la substitution $\theta\sigma$ induit l'endomorphisme hg. Par la proposition 2, la matrice représentative de hg est $M.N_M$.

Remarquons que $d(Me_i)=|\theta(i)|-1$, $d(Ne_i)=|\sigma(i)|-1$, on peut réécrire la formule (7) en

$$s_{ji}(h,g)=\sum_{k=0}^{j-1} d(M e_{ki})=\left(\sum_{k=0}^{j-1}|(\theta(a_{ki})|\right)-(j+1),$$

où on convient que $a_{0i}=\varnothing$.

Il résulte que la formule (8) peut être mise sous la forme

$$N_M e_i=\sum_{j=1}^{|\sigma(i)|} e_{ji} X^{s(\sigma(j,k,i))}, \qquad \text{où} \quad s(\sigma(j,k,i)):=\sum_{k=0}^{j-1}|\sigma(a_{ki})|. \tag{8'}$$

De plus, si $\theta=\sigma$, on aura

$$M_M^{n-1} e_i=\sum_{j=1}^{|\theta(i)|} e_{ji} X^{s(\theta^n(j,k,i))}, \qquad \text{où} \quad s(\theta^n(j,k,i))=\sum_{k=0}^{j-1}|\theta^{n-1}(a_{ki})|. \tag{8''}$$

En particulier, si $|\theta(i)|=q$, $1\leqq i\leqq d$, alors

$$M_M^{n-1} e_i=\sum_{j=1}^{q} e_{ji} X^{(j-1)q^{n-1}}. \tag{8'''}$$

Exemple 3 : La suite de Thue-Morse.

$$\Sigma=\{1,2\}, \qquad \mathbb{E}=\{0,1\}, \qquad \tau(1)=0, \qquad \tau(2)=1;$$
$$\theta(1)=12, \qquad \theta(2)=21, \qquad \theta^{\omega}(1)=(t_n)_{n\geqq 1}.$$

La suite $\{\tau(t_n)\}_{n\geqq 1}$ est appelée suite de Thue-Morse.

Définissons

$$f_1 = \sum_{n \geqq 1} a_n X^{n-1}, \qquad \text{où} \quad a_n = 0, \text{ si } \tau(t_n) = 0; \quad \text{et} \quad a_n = 1, \text{ si } \tau(t_n) = 1.$$

$$f_2 = \sum_{n \geqq 1} b_n X^{n-1}, \qquad \text{où} \quad b_n = 0, \text{ si } \tau(t_n) = 1; \quad \text{et} \quad b_n = 1, \text{ si } \tau(t_n) = 0.$$

D'autre part, on voit que $h(e_1) = e_1 \oplus e_2$, $h(e_2) = e_2 \oplus e_1$,

$$M_1(X) = \begin{pmatrix} 1 & X \\ X & 1 \end{pmatrix}$$

On a donc par (8''')

$$M_n e_1 = M_{h^{n-1}}(h) e_1 = e_1 + e_2 X^{2^{n-1}}, \qquad M_n e_2 = e_2 + e_1 X^{2^{n-1}},$$

$$M_n(X) = \begin{pmatrix} 1 & X^{2^{n-1}} \\ X^{2^{n-1}} & 1 \end{pmatrix}$$

Supposons que $(c_n)_{n \geqq 1}$ est la suite de Thue-Morse sur $\{1, -1\}$, et $f(X) = \sum_{n \geqq 1} c_n X^{n-1}$. Alors

$$f(X) = (1, -1) \prod_{n \geqq 1} M_n e_1 = (1 - X, 1 + X) \prod_{n \geqq 2} M_n e_1$$

$$= (1 - X)(1, -1) \prod_{n \geqq 2} M_n e_1 = (1 - X) f(X^2).$$

On obtient l'équation fonctionnelle

$$f(X) = (1 - X) f(X^2).$$

Example 4 : La suite de Rudin-Shapiro.

$$\Sigma = \{1, 2, 3, 4\}, \qquad \mathbb{E} = \{0, 1\}, \qquad \tau(1) = \tau(2) = 0, \qquad \tau(3) = \tau(4) = 1;$$

$$\theta(1) = 12, \qquad \theta(2) = 13, \qquad \theta(3) = 42, \qquad \theta(4) = 43.$$

Soit $\theta^{\omega}(1) = (t_n)_{n \geqq 1}$, alors la suite $(\tau(t_n))_{n \geqq 1}$ est la suite de Rudin-Shapiro.

On voit que dans ce cas, $h(e_1)=e_1 \oplus e_2$, $h(e_2)=e_1 \oplus e_3$, $h(e_3)=e_4 \oplus e_2$, $h(e_4)=e_4 \oplus e_3$.

$$M_1(X)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ X & 0 & X & 0\\ 0 & X & 0 & X\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

Calculons par (8‴), nous obtenons que

$$M_n(X)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ X^{2^{n-1}} & 0 & X^{2^{n-1}} & 0\\ 0 & X^{2^{n-1}} & 0 & X^{2^{n-1}}\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

et $(1,2,3,4)\,N_\omega e_1=\sum_{n\geqq 1} t_n X^{n-1}$.

Supposons que $(c_n)_{n\geqq 1}$ est la suite de Rudin-Shapiro sur $\{1,-1\}$, et $f(X)=\sum_{n\geqq 1} c_n X^{n-1}$, alors on a l'équation fonctionnelle

$$f(X)=(1,1,-1,-1)\prod_{n\geqq 1} M_n e_1=(1+X,1-X,-1+X,-1-X)\prod_{n\geqq 2} M_n e_1$$
$$=(1,1,-1,-1)\prod_{n\geqq 2} M_n e_1+X(1,-1,1,-1)\prod_{n\geqq 2} M_n e_1=f(X^2)+Xf(-X^2).$$

En remarquant que

$$(1,-1,1,-1)\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ X^2 & 0 & X^2 & 0\\ 0 & X^2 & 0 & X^2\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$$
$$=(1,1,-1,-1)\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ -X^2 & 0 & -X^2 & 0\\ 0 & -X^2 & 0 & -X^2\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

Exemple 5 : la suite de Fibonacci.

$$\theta(1)=12,\qquad \theta(2)=1,\qquad \theta^\omega(1)=(t_n)_{n\geqq 1}.$$

Définissons

$$f_1=\sum_{n\geqq 1} a_n X^{n-1},\qquad \text{où}\quad a_n=1,\ \text{si}\ t_n=1;\quad \text{et}\quad a_n=0,\ \text{sinon.}$$

$$f_2=\sum_{n\geqq 1} b_n X^{n-1},\qquad \text{où}\quad b_n=1,\ \text{si}\ t_n=2;\quad \text{et}\quad b_n=0,\ \text{sinon.}$$

Maintenant, $h(e_1)=e_1 \oplus e_2$, $h(e_2)=e_1$, et

$$M_1(X)=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ X & 0 \end{pmatrix}$$

Remarquons que $|\theta^n(1)|=F_n$, où F_n est le n-ième nombre de Fibonacci. (C'est-à-dire, $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$ avec $F_0=1$, $F_1=1$.)

Nous obtenons donc par (8″)

$$M_n(X)=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ X^{F_n} & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$N_\omega e_1=\prod_{n\geqq 1}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ X^{F_n} & 0 \end{pmatrix} e_1=\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$$

en remarquant que

$$M_1(X)=\begin{pmatrix} X^{\mathbf{1}(0,0)^t} & X^{\mathbf{1}(0,0)^t} \\ X^{\mathbf{1}(1,0)^t} & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$M_1(1)=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\qquad (1,1)\,M^n\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}=F_n.$$

Donc, si l'on adopte l'algorithme de la remarque 1, on obtient

$$\begin{pmatrix} f_1(X) \\ f_2(X) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ X^{\mathbf{1}(1,0)^t} & 0 \end{pmatrix}\prod_{n\geqq 1}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ X^{\mathbf{1}M^n(1)(1,0)^t} & 0 \end{pmatrix} e_1$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ X^{\mathbf{1}(1,0)^t} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_1(X^M) \\ f_2(X^M) \end{pmatrix}\qquad (*)$$

et on obtient l'équation fonctionnelle suivante

$$f_1(X)=f_1(X^M)+X^{\mathbf{1}(1,1)^t} f_1(X^{M^2}).$$

3. CONSÉQUENCES DES THÉORÈMES PRINCIPAUX

1. Soient $t=(t_n)_{n\geqq 0}$ le point fixe de la substitution θ satisfaisant (H_4), $\theta^{\omega}(1)=\theta(t)=t$ et $\lambda\theta(t)=u=\underset{n\geqq 0}{\oplus} u_n$, $u_n\in B_d$. Soit h l'endomorphisme sur $(B_d, \oplus)$ induit par θ. Alors par la remarque 3 (c), $h^{\omega}(e_1)=h(u)=u$. On déduit donc

$$h^{\omega}(e_1)=\lambda\theta^{\omega}(1)=\lambda\theta(t)=u=h(u)=hh^{\omega}(e_1)$$

Si l'on désigne par $M(h^{\omega})$ et $M(h)$ les matrices représentatives respectivement de h^{ω} et h [remarquons que sous l'hypothèse (H_4) la première colonne est bien définie, mais on note quand même par $M(h^{\omega})$ par abus de langage, parce qu'on n'a besoin que de $M(h^{\omega})e_1$], par des calculs analogues à ceux du lemme 1, la matrice correspondant à hh^{ω} est $M(h)M_h(h^{\omega})$; on établit alors

THÉORÈME 2 : *Sous l'hypothèse* (H_4) *on a l'équation de Mahler généralisée suivante :*

$$M(h^{\omega})e_1=M(h)M_h(h^{\omega})e_1 \tag{20}$$

En particulier, soit θ *une* q*-substitution sur* Σ *et soit* $M_1=M(h)$. *Par la définition du produit de matrices du type III, on voit que*

$$M(h^{\omega})=\prod_{n\geqq 1} M_n, \qquad \text{où} \quad M_n(X)=M_1(X^{q^n}).$$

Donc si l'on pose

$$M(X):=M(h^{\omega})(X)$$

alors

$$M(X)e_1=M_1(X)M(X^q)e_1. \tag{21}$$

Par le théorème 2 et la remarque 1, on a

COROLLAIRE 2 : $M_{\theta}=(M(\theta))(1)$ *désignant la matrice de la substitution* θ *et* $f_1, f_2, \ldots, f_d$ *désignant les fonctions génératrices des apparitions de* $1, 2, \ldots, d$ *dans la suite substitutive, on a*

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_d \end{pmatrix}=M_1(X)\begin{pmatrix} f_1(\theta(X)) \\ \vdots \\ f_d(\theta(X)) \end{pmatrix}=\ldots=\prod_{i=1}^{k} M_1(\theta^{i-1}(X))\begin{pmatrix} f_1(\theta^k(X)) \\ \vdots \\ f_d(\theta^k(X)) \end{pmatrix}$$

où $f_j(\theta^k(X))$, $1 \leqq j \leqq d$, s'obtient en remplaçant dans $f_j(X)$ chaque X^l par $X^{c(M)}$, avec $c(M)=\mathbf{1}(M_\theta)^k v_j^l$ et où la j-ième colonne de $M_1(\theta^i(X))$ s'obtient en remplaçant dans la j-ième colonne de $M_1(X)$ chaque X^l par $X^c(M)$, avec $c(M)=\mathbf{1}(M_\theta)^i(1)v_j^l$.

Remarque 7 : On peut généraliser le corollaire 2 aux suites engendrées par produit de matrices du type I.

Comme application, on va démontrer que l'ensemble des entiers $\mathbb{Z}$ peut être décomposé en une union disjointe infinie de suites de Fibonacci différentes (*voir* appendice).

2. (*a*) Notons $A^*(d)$ le semi-groupe composé des matrices d'ordre d dont les coefficients sont 0 et 1 et dont chaque colonne a un et un seul 1 (c'est-à-dire les matrices stochastiques par colonnes à coefficients 0 et 1).

Soient $A_0, \ldots, A_{q-1} \in A^*(d)$, $q \geqq 1$, alors $A_j=(e_{j1}, \ldots, e_{jd})$, $0 \leqq j \leqq q-1$, $1 \leqq i \leqq d$, $e_{ji} \in \mathbb{E}$.

Remarquons d'abord que nous pouvons définir une q-substitution sur $\Sigma=\{1, \ldots, d\}$ de la façon suivante :

$$\theta(i)=\overset{q-1}{\underset{j=0}{\subset}} \lambda^{-1}(e_{ji}), \qquad 1 \leqq i \leqq d. \tag{22}$$

D'autre part, étant donnée une q-substitution

$$\theta(i)=\overset{q-1}{\underset{j=0}{\subset}} a_{ji}, \qquad a_{ji} \in \Sigma. \tag{23}$$

Alors, nous obtenons q matrices de $A^*(d)$:

$$A_j=(e_{\lambda(a_{j1})}, \ldots, e_{\lambda(a_{jd})}), \qquad 0 \leqq j \leqq q-1.$$

Nous établissons ainsi une bijection entre les q-substitutions sur Σ et les sous-ensembles de cardinal q de $A^*(d)$ avec $c(M)=\mathbf{1}(M_\theta)^k(1)v_j^l$.

Remarque 8 :
(H$_5$) $[A_0]_{11}=1 \Leftrightarrow \theta(1)=1w$, $w \in \Sigma^*$.

Remarque 9 : Posons $M=\sum_{0 \leqq j \leqq q-1} A_j$. Alors M n'est autre que la matrice substitutive de θ qui joue un rôle très important dans l'étude de θ. *Voir*, par exemple [3].

(*b*) Posons :

$$M_0(X)=\sum_{j=0}^{q-1} A_j X^j, \qquad M_n(X):=\sum_{j=0}^{q-1} A_j X^{jq^n}, \qquad N_n(X)=\prod_{k=0}^{n} M_k(X) \quad (24)$$

Nous avons évidemment :

$$M_n(X)=M_0(X^{q^n}).$$

Donc les matrices M_n sont de matrices du type III, et N_n est le produit partiel de matrices du type III. Si θ est la substitution définie par (22) et h l'endomorphisme sur $(B_d, \oplus)$ induit par θ, on vérifie facilement que $M_0(X)$ est la matrice représentative de h. Il résulte du théorème 1'', que la suite engendrée par le produit des M_n coïncide avec celle engendrée par θ. De plus

$$\lim_{n\to\infty} N_n(X)\, e_1 = N_\omega\, e_1$$

existe et la suite des coefficients de $(1, \ldots, d)\, N_\omega\, e_1$ qu'on note $(t_n)_{n\geqq 0}$ est une suite q-substitutive.

D'autre part, si l'on développe $N_n(X)$ en polynômes à coefficients matriciels, on obtient

$$N_n(X)=\sum_{k=0}^{q^{n+1}-1} C_k(n)\, X^k$$

où $C_k(n)$ dépend de n.

Développons k en base q :

$$k=b_0+b_1 q+\ldots+b_n q^n, \qquad 0\leqq b_i\leqq q-1.$$

En particulier, si l'on suppose $q^m\leqq k\leqq q^{m+1}$, $m+1\leqq n$, alors

$$C_k(n)=D_0\ldots D_m A_0^{n-m}, \qquad D_j\in A^*(d) \quad (26)$$

Donc, si $N\geqq n$, on a

$$C_k(N)=D_0\ldots D_m A_0^{N-m}.$$

Sous l'hypothèse (H_5), *i.e.*, $[A_0]_{11}=1$, on a $A_0\, e_1=e_1$, donc pour tout $A\in A^*(d)$, et $n\in\mathbb{N}$, $AA_0^n(e_1)=A(e_1)$, il en résulte que

$$\lim_{n\to\infty} AA_0^n(e_1)=A\, e_1.$$

Donc si $q^{m-1} \leqq k \leqq q^m$, notons par abus de langage $C_k = D_0 \ldots D_m$.

Par le théorème 1″, nous avons

$$C_k(e_1) = e_j \quad \Leftrightarrow \quad [C_k]_{i1} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad X^k \in [N_\omega]_{i1} \quad \Leftrightarrow \quad t_k = i \tag{27}$$

Définissons $\tau(C_k) = \lambda^{-1}(C_k(e_1))$, nous avons alors par (27)

$$(\tau(C_k))_{k \geqq 0} = (t_k)_{k \geqq 0}$$

Nous énonçons donc le résultat suivant :

THÉORÈME 3 : *Avec les notations précédentes, soient $A_0, \ldots, A_{q-1}$ q matrices quelconques de $A^*(d)$. Il existe une application $\tau : A^*(d) \to \Sigma$, telle que $(C_k)_{k \geqq 0}$ soit une suite engendrée par une q-substitution.*

3. Gardons les notations du paragraphe précédent. Soit

$$k = b_0 + b_1 q + \ldots + b_m q^m, \qquad 0 \leqq b_i \leqq q-1, \quad b_m \neq 0,$$

alors

$$qk + l = l + b_0 q + b_1 q^2 + \ldots + b_m q^{m+1}, \qquad 0 \leqq l \leqq q-1. \tag{28}$$

Par (26), si $n \geqq m$,

$$C_k(n) = D_0 \ldots D_m A_0^{n-m}.$$

On déduit donc par (28)

$$C_{qk+n}(n) = A_l D_0 \ldots D_m A_0^{n-m-1}.$$

Remarquons que $A_0 e_1 = e_1$, nous avons

$$C_{qk+n}(e_1) = A_l D_0 \ldots D_m A_0^{n-m-1}(e_1) = A_l D_0 \ldots D_m(e_1) = A_l C_k(e_1).$$

i.e.

$$C_{qk+l}(e_1) = A_l C_k(e_1) \tag{29}$$

Supposons maintenant que la suite $(t_n)_{n \geqq 0}$ est engendrée par une q-substitution θ, alors il existe q matrices $A_0, \ldots, A_{q-1}$ telles que $(t_n)_{n \geqq 0}$ soit engendrée par le produit M_n défini par (24). Nous obtenons par (27) et (28) :

$$\lambda(t_{qk+l}) = A_l(\lambda(t_k)). \tag{30}$$

Inversement, soit $(t_n)_{n \geqq 0}$ une suite de composantes $\in \{1, \ldots, d\}$ satisfaisant (30) avec $t_0 = 1$, où A_l, $0 \leqq l \leqq q-1$, q matrices de $A^*(d)$. Alors par le procédé précédent, il existe une suite $(s_n)_{n \geqq 0}$ avec $s_0 = 1$ qui satisfait $\lambda(s_{qk+l}) = A_l(\lambda(s_k))$ et qui est engendrée par une q-substitution.

Donc, $(t_k)_{k \geqq 0}$ coïncide avec $(s_k)_{k \geqq 0}$ et bien entendu, c'est une suite q-substitutive.

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME 4 : *Soit* $t = (t_n)_{n \geqq 0} \in \Sigma^{\mathbb{N}}$, *les deux assertions suivantes sont équivalentes* :

(i) *t est engendrée par une q-substitution;*

(ii) *t est engendrée par q formules récurrentes.*

Nous remercions J. Peyrière et M. Queffélec pour les discussions et aides.

BIBLIOGRAPHIE

1. J.-P. ALLOUCHE, Arithmétique et automates finis, *Astérisque*, *147-148*, 1987, p. 13-26.
2. G. CHRISTOL, T. KAMAE, M. MENDÈS FRANCE et G. RAUZY, Suites algébriques, automates et substitutions, *Bull. Soc. Math. France*, *108*, 1980, p. 164-192.
3. M. QUEFFÉLEC, Substitution Dynamical Systems-Spectral Analysis, *Lecture Notes in Math.*, *1294*, 1987, Springer-Verlag.
4. Z.-X. WEN et Z.-Y. WEN, Sequences of Substitutions and Related Topics, *Adv. in Math. China*, *18*, 1989, p. 270-293.

APPENDICE

Soient $\theta(1) = 12$, $\theta(2) = 1$ et $\theta^{\omega}(1) = (t_n)_{n \geqq 0}$ le point fixe de θ.

Soit $f_1(X) = \sum_{n \geqq 0} a_n X^n = \sum_{n \geqq 0} X^{w_n}$, la fonction génératrice de la fonction indicatrice de a_n, où $a_n = 1$ si $t_n = 1$ et $a_n = 0$ si $t_n = 2$, et soit

$$f_2(X) = \frac{1}{1-X} - f_1(X) = \sum_{n \geqq 0} X^{v_n} = \sum_{n \geqq 0} b_n X^n.$$

Dans l'exemple 5, on a établi l'équation fonctionnelle pour la suite de Fibonacci.

Définissons

$$\lambda(j) = \#\{t_i = 1;\ 0 \leqq i \leqq j-1\} \text{ et } \lambda(0) = 0 \text{ par convention.}$$

1. Par récurrence, on peut démontrer que

$$f_1(X)=\sum_{n\geqq 0} X^{1\,(n,\,\lambda(n))^t},$$

Donc, par la définition de $f_1(\theta^n(X))$ et le corollaire 2, on a

$$f_1(\theta(X))=\sum_{n\geqq 0} X^{1 M_\theta (n,\,\lambda(n))^t}=\sum_{n\geqq 0} X^{1\,(n+\lambda(n),\,n)^t},$$

$$f_1(\theta^l(X))=\sum_{n\geqq 0} X^{1 M_\theta^l (n,\,\lambda(n))^t}$$

2. Définissons une famille de suites u_l de la façon suivante :

$$u_0=\{\lambda_n\}_{n\geqq 0}=\{u_0^{(n)}\}_{n\geqq 0},$$
$$u_1=\{n\}_{n\geqq 0}=\mathbb{N},$$
$$u_2=\{n+\lambda(n)\}_{n\geqq 0}=\{w_n\}_{n\geqq 0},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$u_l=\{u_l^{(n)}\}_{n\geqq 0}=\{(1,1)\,M_\theta^{l-2}(n,\,\lambda(n))^t\}_{n\geqq 0},\qquad l\geqq 2$$

Alors

$$f(\theta^{l-2}(X))=\sum_{n\geqq 0} X^{u_l^{(n)}},\qquad \text{où}\quad f:=f_1;$$

On convient que

$$f(\theta^{-2}(X))=\sum_{n\geqq 0} X^{\lambda(n)},\qquad f(\theta^{-1}(X))=\sum_{n\geqq 0} X^n$$

D'autre part, pour $n\in\mathbb{N}$, on a

$$u_{l-1}^{(n)}+u_l^{(n)}=(1,1)\,M_\theta^{l-3}(n,\lambda(n))^t+(1,1)\,M_\theta^{l-2}(n,\lambda(n))^t$$
$$=(1,1)\,M_\theta^{l-1}(n,\lambda(n))^t=u_{l+1}^{(n)}$$

donc la suite $\{u_l^{(n)}\}_{l\geqq 0}$ est une suite de Fibonacci dont les deux premiers termes sont $u_0^{(n)}=\lambda(n)$ et $u_1^{(n)}=n$.

Soit

$$f_2(\theta^l(X))=\sum_{n\geqq 0} X^{v_l^{(n)}},$$

analogue au précédent, on peut démontrer que $\{v_l^{(n)}\}_{l\geqq 0}$ est aussi une suite de Fibonacci. [On peut le voir aussi par l'équation $(*)$.]

Maintenant, d'après les définitions de $u_l^{(n)}$ et $v_l^{(n)}$ et ($*$), on a successivement

$$\begin{aligned}\mathbb{N}=\{u_1^{(n)}\}_{n\geqq 0}&=\{v_1^{(n)}\}_{n\geqq 0}\cup\{u_2^{(n)}\}_{n\geqq 0}\\&=\{v_1^{(n)}\}_{n\geqq 0}\cup\{v_2^{(n)}\}_{n\geqq 0}\cup\{u_3^{(n)}\}_{n\geqq 0}=\dots\\&=\Big(\bigcup_{1\leqq l\leqq k}\{v_l^{(n)}\}_{n\geqq 0}\Big)\cup\{u_{k+1}^{(n)}\}_{n\geqq 0}=\bigcup_{l\geqq 1}\{v_l^{(n)}\}_{n\geqq 0}\end{aligned}$$

Remarquons que $\{v_l^{(n)}\}_{n\geqq 0}$ sont disjointes deux à deux, donc les suites $\{v_l^{(n)}\}_{l\geqq 0}$ sont disjointes aussi deux à deux, on obtient

$$\mathbb{N}=\bigcup_{n\geqq 1}\{v_l^{(n)}\}_{l\geqq 1}.$$