

M. BOUSQUET-MÉLOU

Une bijection entre les polyominos convexes dirigés et les mots de Dyck bilatères

Informatique théorique et applications, tome 26, n° 3 (1992), p. 205-219.

http://www.numdam.org/item?id=ITA_1992__26_3_205_0

© AFCET, 1992, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Informatique théorique et applications » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

UNE BIJECTION ENTRE LES POLYOMINOS CONVEXES DIRIGÉS ET LES MOTS DE DYCK BILATÈRES (*)

par M. BOUSQUET-MÉLOU ⁽¹⁾

Communiqué par J. BERSTEL

Résumé. – Nous appliquons la méthodologie DSV, introduite par Schützenberger, pour expliquer un résultat de Lin et Chang relatif à l'énumération des polyominos convexes dirigés selon le périmètre : le nombre de polyominos convexes dirigés de périmètre $2n+4$ est le coefficient binomial $\binom{2n}{n}$. Cette méthodologie consiste à construire un codage de ces polyominos par les mots d'un langage algébrique. En fait, ce langage est ici le langage de Dyck bilatère (sur deux lettres).

Abstract. – We apply the so-called "DSV methodology", introduced by Schützenberger, in order to explain a result of Chang and Lin about the enumeration of directed and convex polyominoes according to the perimeter: the number of directed and convex polyominoes having perimeter $2n+4$ is $\binom{2n}{n}$. This methodology consists in the construction of a coding of these polyominoes with words of an algebraic language. In fact, this language is the bilateral Dyck (on two letters).

INTRODUCTION

Considérons le plan $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Une cellule élémentaire est un carré $[i, i+1] \times [j, j+1]$, où i et j sont des entiers.

Un polyomino est une union finie de cellules élémentaires, d'intérieur connexe, et définie à translation près. On peut définir plusieurs paramètres relatifs à ce polyomino, par exemple sa hauteur, sa largeur, son périmètre et son aire, c'est-à-dire le nombre de cellules élémentaires le composant (fig. 1).

(*) Reçu mai 1990, révisé en juillet 1991.

Recherches partiellement soutenues par le PRC « Mathématiques et Informatique ».

(¹) LABRI (Laboratoire Bordelais de Recherche en Informatique) U.A. au C.N.R.S. n° 1304, Université Bordeaux-I, 351, cours de la Libération, 33405 Talence Cedex France.

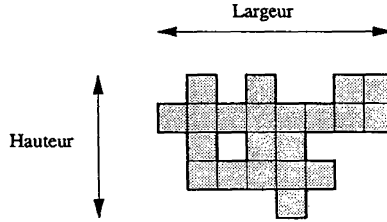


Figure 1. — Un polyomino : de hauteur 5, de largeur 8, de périmètre 36, d'aire 21.

Les polyominos sont connus et étudiés depuis longtemps. Le livre que Golomb leur a consacré en 1965 [Go] et les articles de Gardner dans le « Scientific American » en 1958 ont beaucoup contribué à les populariser ([Ga]).

C'est à l'énumération de ces objets que nous nous attachons ici.

Énumérer les polyominos généraux est un problème majeur en combinatoire. On ne dispose encore à ce jour que de majorations asymptotiques, dues à Klarner et Rivest [Kl-Ri].

En revanche, plusieurs sous-classes ont pu être dénombrées. La plupart d'entre elles sont définies par des contraintes relevant de deux notions : la *convexité* et l'existence d'une *direction privilégiée*.

Un polyomino est *verticalement* (resp. *horizontalement*) *convexe* lorsque toutes ses intersections avec les colonnes $[i, i + 1] \times \mathbb{R}$ (resp. lignes $\mathbb{R} \times [j, j + 1]$) du plan sont convexes. Un polyomino qui est à la fois verticalement et horizontalement convexe sera dit *convexe*. Remarquons que, pour un tel polyomino, la connaissance de la hauteur et de la largeur fournit celle du périmètre.

La notion de *structure dirigée*, quant à elle, provient de la physique statistique, où elle a été introduite en 1982, donnant aussitôt lieu à de nombreux travaux. Des liens étroits existent entre cette discipline et la combinatoire énumérative. Les polyominos y apparaissent le plus souvent sous la forme équivalente d'*animaux* tracés sur un réseau carré. On obtient un animal en remplaçant chaque cellule élémentaire d'un polyomino par son centre. L'animal est dit *dirigé* lorsque chacun de ses points peut être atteint depuis un point particulier, appelé *point source*, par un chemin restant dans l'animal et ne faisant des pas que dans deux directions données (*fig. 2*). Il est possible de définir de même des animaux dirigés à plusieurs points sources.

Ces animaux dirigés sont très étudiés par les physiciens, en dimension 2 par Derrida, Nadal et Vanniménus [De-Na-Va], Hakim et Nadal [Ha-Na] et

en dimension 3 par Dhar [Dh2], qui démontre d'ailleurs l'équivalence de ce modèle avec celui, fort célèbre, des *hexagones durs*, résolu en 1980 par Baxter [Ba 1, 2] [Dh1]. Le modèle des animaux dirigés en dimension 2 a été résolu combinatoirement par Gouyou-Beauchamps et Viennot [Go-Vi] [Vi].

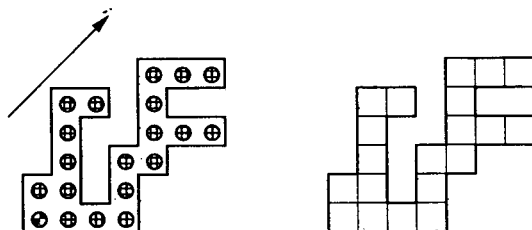


Figure 2. — Un animal dirigé à un point source et le polyomino associé.

Les notions de convexité et de direction privilégiée sont souvent combinées : on peut ainsi citer les travaux de Penaud [Pe 1, 3], ceux de Delest et Dulucq [De-Du] sur les animaux verticalement convexes et dirigés, et ceux de Privman et Svrakic [Pr-Sv], Privman et Forgacs [Pr-Fo], Fedou [Fe], Penaud [Pe 2] sur les animaux diagonalement convexes et dirigés.

En ce qui concerne les polyominos convexes et dirigés, Lin et Chang [Li-Ch], par des méthodes analytiques, ont démontré le résultat étonnamment simple suivant : le nombre de polyominos convexes dirigés de périmètre $2n+4$ est le coefficient binomial $\binom{2n}{n}$. En fait, ils raffinent ce résultat en donnant la série génératrice de ces objets comptés suivant la hauteur et la largeur simultanément.

L'objet de cet article est d'expliquer leur résultat, en construisant une bijection entre les polyominos convexes dirigés et les mots d'un langage algébrique appelé *Dyck bilatère*, formé des mots sur l'alphabet à deux lettres x et \bar{x} ayant autant d'occurrences de x que d'occurrences de \bar{x} . Cette construction permet alors de retrouver simplement la série génératrice à deux variables suivant la hauteur et la largeur.

Le paramètre aire ne semble pas pouvoir être étudié par cette bijection. Une autre construction de Bousquet-Mélou et Viennot [Bo-Vi], complètement différente, permet d'énumérer les polyominos convexes dirigés selon l'aire. En revanche, cette dernière bijection ne redonne pas directement la formule $\binom{2n}{n}$.

De façon précise, soit P un polyomino convexe, et R le plus petit rectangle le contenant. Les périmètres de P et R sont alors égaux, ce qui constitue d'ailleurs une caractérisation des polyominos convexes.

Soit $[N, N']$ (resp. $[W, W']$, $[S, S']$, $[E, E']$) l'intersection de la frontière de P avec le bord supérieur (resp. gauche, inférieur, droit) de R , les points $N, N', W, W', S, S', E, E'$ étant ordonnés suivant le sens trigonométrique de la frontière de R (fig. 3). Le repérage de ces points permet de définir différentes familles classiques de polyominos convexes.

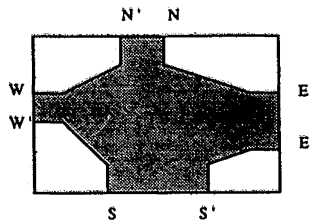


Figure 3. — Un polyomino convexe.

Un *polyomino parallélogramme* est un polyomino convexe tel que $S = W'$ et $N = E'$.

Un *polyomino convexe dirigé* est un polyomino convexe tel que $N = E'$.

Un *polyomino tas* est un polyomino convexe tel que $N = E'$ et $S' = E$ (fig. 4).

I. LANGAGES ET MOTS DE DYCK

Soit A un ensemble, et A^* l'ensemble des *mots* s'écrivant $u = a_1 \dots a_k$, où, pour tout i , la lettre a_i est élément de A . On munit A^* de l'opération de *concaténation* qui associe au couple (u, v) le mot uv obtenu en juxtaposant u et v . L'ensemble A est appelé un *alphabet*, et A^* est le *monoïde libre engendré par A* .

On considère l'algèbre $\mathbb{Z} \ll A \gg$ des *séries formelles non commutatives* de la forme $\sum_{u \in A^*} n_u u$, où les n_u sont éléments de \mathbb{Z} , et u décrit l'ensemble A^* .

Cette algèbre est munie de l'addition usuelle et du produit déduit du produit de concaténation des mots.

Soit \mathcal{L} un langage inclus dans A^* . La *série génératrice formelle* des mots de \mathcal{L} est $\underline{\mathcal{L}} = \sum_{u \in \mathcal{L}} u$. Lorsque \mathcal{L} est engendré par une *grammaire algébrique*

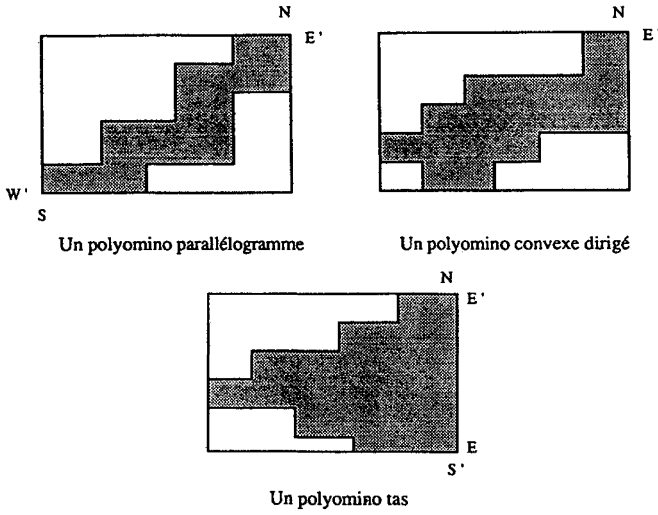


Figure 4. – Différentes familles de polyominos convexes.

non ambiguë, la série \mathcal{L} satisfait un système d'équations algébriques – en variables non commutatives –.

L'exemple le plus classique de langage algébrique est celui des *mots de Dyck*, (aussi appelé *langage de Dyck restreint à deux lettres* ou *systèmes de parenthèses bien formés*) noté \mathcal{D} . Un mot de Dyck u est un mot de $\{x, \bar{x}\}^*$, vérifiant les deux conditions suivantes :

- (i) $|u|_x = |u|_{\bar{x}}$,
- (ii) si $u = vw$, $|v|_x \geq |v|_{\bar{x}}$

où $|u|_x$ désigne le nombre d'occurrences de x dans u .

Un *mot de Dyck bilatère* est un mot de $\{x, \bar{x}\}^*$ vérifiant la première de ces conditions. Le nombre de mots de Dyck bilatères de longueur $2n$ est bien sûr $\binom{2n}{n}$.

Pour écrire l'équation satisfaite par la série génératrice formelle des mots de Dyck, remarquons qu'un tel mot se factorise de façon unique sous la forme $xu\bar{x}v$, où u et v sont des mots de Dyck. Il est équivalent de dire que \mathcal{D} est engendré par la grammaire algébrique donnée par les deux règles de dérivation suivantes :

- $D \rightarrow e$, (e désigne le mot vide),
- $D \rightarrow xD\bar{x}D$.

L'équation $\mathcal{Q} = e + x\mathcal{Q}\bar{x}\mathcal{Q}$ s'en déduit.

Soit u un mot de Dyck; on appelle *pic* de u tout facteur $x\bar{x}$ dans u , qui s'écrit alors $u = vx\bar{x}w$. La *hauteur* de ce pic est $1 + |v|_x - |v|_{\bar{x}}$.

On appelle *creux* de u tout facteur $\bar{x}x$ de u , qui s'écrit alors $u = v\bar{x}xw$. La *hauteur* de ce creux est $|v|_x - |v|_{\bar{x}}$.

Les mots de Dyck peuvent être représentés par des *chemins de Dyck* (fig. 5) en codant par un pas Nord-Est chaque lettre x et par un pas Sud-Est chaque lettre \bar{x} . L'existence de cette représentation explique le choix de la terminologie « pic » et « creux ».

Exemple. — Le chemin de Dyck associé au mot $xx\bar{x}x\bar{x}x\bar{x}x\bar{x}x\bar{x}x\bar{x}$ est le suivant. Il présente quatre pics et trois creux. Les hauteurs des pics sont, de gauche à droite, 2, 2, 4, 3. Celles des creux sont 2, 1, 3.

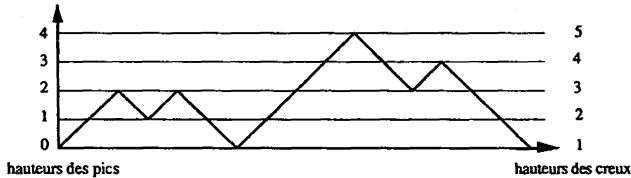


Figure 5. — Un chemin de Dyck.

Mots de Dyck et polyominos parallélogrammes

Les mots de Dyck de longueur $2n$ (pour $n \geq 1$) sont en bijection avec les polyominos parallélogrammes de périmètre $2n+2$. Nous rappelons ici le codage g démontrant l'existence de cette bijection, proposé par Delest et Viennot [De-Vi].

Soit P un polyomino parallélogramme à n colonnes, notées, de gauche à droite, C_1, \dots, C_n . Pour $1 \leq i \leq n$, soit b_i la hauteur de la colonne C_i . Pour $2 \leq i \leq n$, soit a_i le nombre de cellules par lesquelles les colonnes C_i et C_{i-1} sont en contact (fig. 6).

On a $a_i \leq \min(b_i, b_{i-1})$ pour $i \geq 2$.

L'image par g de P est alors l'unique mot de Dyck à n pics et $n-1$ creux dont la liste des hauteurs des pics (resp. creux) est (b_1, \dots, b_n) (resp. (a_2, \dots, a_n)). Le nombre de pics de $g(P)$ est ainsi la largeur de P .

Exemple : Pour le polyomino parallélogramme de la figure 6 :

- $n = 8$,
- $(b_1, \dots, b_n) = (3, 4, 3, 4, 4, 2, 2, 2)$,
- $(a_2, \dots, a_n) = (3, 3, 3, 3, 1, 2, 2)$.

L'image de ce polyomino par g est le mot de Dyck représenté par le chemin suivant.

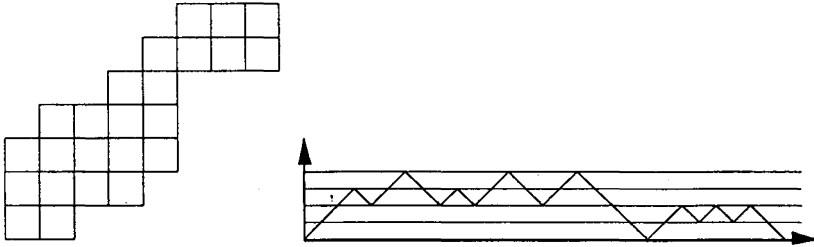


Figure 6. - Codage d'un polyomino parallélogramme par un mot de Dyck.

Mots de Dyck bilatères

L'ensemble des mots de Dyck bilatères est noté \mathscr{D}' . Ces mots se représentent par des *chemins de Dyck bilatères* (fig. 7).

On désigne par s le morphisme de monoïde de $\{x, \bar{x}\}^*$ défini par $s(x) = \bar{x}$ et $s(\bar{x}) = x$.

Soit u un mot de Dyck bilatère. Ce mot admet une unique factorisation sous la forme $u = u_0 s(v_0) u_1 s(v_1) \dots u_{k-1} s(v_{k-1}) u_k$, où $k \geq 0$ et :

- u_0 et u_k sont des mots de Dyck,
- u_1, \dots, u_{k-1} et v_0, \dots, v_{k-1} sont des mots de Dyck non vides.

On appelle alors *pic* de u tout pic de l'un des mots u_i ou v_i .

Le codage des polyominos convexes dirigés que nous allons proposer repose plutôt sur l'existence d'une autre factorisation. Soit u un mot de Dyck bilatère; on peut distinguer deux cas :

- soit $u = s(v)$, où v est un mot de Dyck,
- soit $u = wxu\bar{x}s(v)$, où u et v des mots de Dyck, et w est un mot de Dyck bilatère.

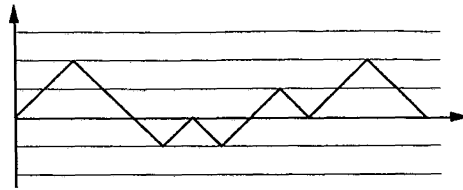


Figure 7. – Un chemin de Dyck bilatère (associé au mot xxxxxxxxxxxxxxxx).

II. CODAGE DES POLYOMINOS CONVEXES DIRIGÉS

Soit P un polyomino convexe dirigé à k colonnes, notées, de gauche à droite, C_1, \dots, C_k . Soit p le plus petit des entiers i tels que le polyomino formé des colonnes C_i, \dots, C_k soit un polyomino parallélogramme. Le polyomino P' formé des colonnes C_p, \dots, C_k est alors le polyomino parallélogramme maximal de P .

Le défaut d de P est la différence entre la base de la colonne C_1 et celle de la colonne C_p (fig. 8). Ainsi, P est un polyomino parallélogramme si et seulement s'il est de défaut nul.

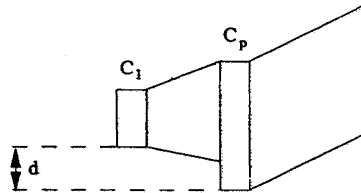


Figure 8. – Défaut d'un polyomino convexe dirigé.

Nous allons partitionner l'ensemble des polyominos convexes dirigés en quatre sous-ensembles.

1. Si P est un polyomino parallélogramme dont la première colonne est de hauteur un, on dira que P est un polyomino parallélogramme simple (fig.9).

Sinon, pour $i \geq p + 1$, soit a_i le nombre de cellules par lesquelles les colonnes C_{i-1} et C_i sont en contact. Si $p \neq k$, soit $a = \min \{ a_i, p + 1 \leq i \leq k \}$. On peut distinguer trois cas.

2. $p = k$, ou $a \geq 3$.

Deux colonnes consécutives de P' sont toujours en contact par trois cellules au moins. On dira que P est un polyomino épais. Nous verrons que ces polyominos sont en bijection avec les polyominos convexes dirigés généraux.

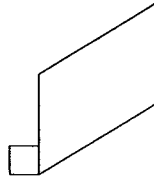


Figure 9. – Un polyomino parallélogramme simple.

Si $p < k$ et $a \leq 2$, soit $r = \min \{ i \geq p + 1 / a_i \leq 2 \}$. Alors a_r vaut un ou deux.

3. $a_r = 1$.

Le polyomino P est obtenu en juxtaposant un polyomino épais P_1 , formé des colonnes C_1, \dots, C_{r-1} , et un polyomino parallélogramme quelconque P_2 , formé des colonnes C_r, \dots, C_k , de telle sorte que P_1 et P_2 soient en contact par une cellule. On notera $P = (P_1, P_2)_1$. Le périmètre de P est alors la somme de ceux de P_1 et P_2 , diminuée de deux (fig 10).

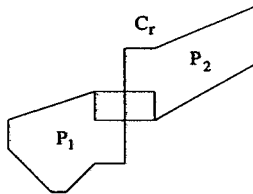


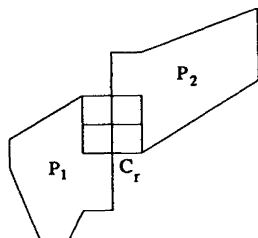
Figure 10. – $P = (P_1, P_2)_1$.

4. $a_r = 2$.

Le polyomino P est obtenu en juxtaposant un polyomino épais P_1 , formé des colonnes C_1, \dots, C_{r-1} , et un polyomino parallélogramme P_2 ayant au moins deux cellules en première colonne, formé des colonnes C_r, \dots, C_k , de telle sorte que P_1 et P_2 soient en contact par deux cellules. On notera $P = (P_1, P_2)_2$. Le périmètre de P est alors la somme de ceux de P_1 et P_2 , diminuée de quatre (fig 11).

Nous allons maintenant décrire une bijection entre les polyominos épais et les polyominos convexes dirigés, qui permettra ensuite de définir récursivement le codage des polyominos convexes dirigés. On reprend les notations utilisées ci-dessus.

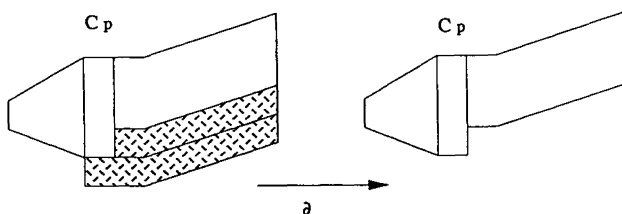
DÉFINITION 1 : Soit ∂ l'application de l'ensemble des polyominos épais dans l'ensemble des polyominos convexes dirigés définie de la manière suivante :

Figure 11. - $P=(P_1, P_2)_2$.

soit P un polyomino épais à k colonnes, et P' son polyomino parallélogramme maximal, formé des colonnes C_p, \dots, C_k . Alors $\partial(P)$ est le polyomino obtenu en supprimant :

- la cellule inférieure de C_p ,
- les deux cellules inférieures des colonnes C_{p+1}, \dots, C_k .

SCHÉMA :

Figure 12. - L'application ∂ .

Remarque : Les polyominos épais sont exactement ceux pour lesquels les transformations décrites ci-dessus mènent à un polyomino convexe dirigé de même largeur.

PROPOSITION 2 : *L'application ∂ décrite dans la définition précédente est une bijection entre les polyominos épais et les polyominos convexes dirigés. De plus, si P est un polyomino épais, le périmètre de $\partial(P)$ est celui de P , diminué de deux.*

Preuve : Décrivons la bijection réciproque de ∂ .

Soit P' un polyomino convexe dirigé à k colonnes, notées C_1, \dots, C_k , et soit p le plus grand entier tel que le polyomino formé des colonnes C_1, \dots, C_p soit un polyomino tas. Soit P le polyomino obtenu en ajoutant une cellule en bas de la colonne C_p et deux cellules en bas des colonnes C_{p+1}, \dots, C_k . Alors $\partial(P)=P'$.

La seconde assertion provient de la remarque suivante : la largeur de $\partial(P)$ est celle de P , et la hauteur de $\partial(P)$ est celle de P , diminuée de un.

Remarque : Si P est un polyomino parallélogramme épais, $\partial(P)$ est aussi un polyomino parallélogramme, dont la hauteur à gauche (c'est-à-dire la hauteur de la première colonne) est celle de P , diminuée de un.

Au contraire, si P est un polyomino épais de défaut d non nul, $\partial(P)$ sera un polyomino convexe dirigé de défaut $d-1$.

Soit alors φ l'application qui, au polyomino convexe dirigé P , associe P lui-même si P est simple, $\partial(P)$ si P est épais, et P_1 si P s'écrit $(P_1, P_2)_1$ ou $(P_1, P_2)_2$. Alors, pour tout P , il existe un entier n tel que $\varphi^n(P)$ soit un polyomino parallélogramme simple.

On peut maintenant définir le codage h des polyominos convexes dirigés, en utilisant la bijection g entre les polyominos parallélogrammes et les mots de Dyck rappelée dans le paragraphe I.

DÉFINITION 3 : Soit h l'application de l'ensemble des polyominos convexes dirigés dans celui des mots de Dyck bilatères, définie de la façon suivante. Soit P un polyomino convexe dirigé. Quatre cas se présentent :

1. P est un polyomino parallélogramme simple; son codage par g s'écrit $x\bar{x}v$, où v est un mot de Dyck. Alors $h(P) = s(v)$.

2. P est un polyomino épais. Alors $h(P) = h(\partial(P))x\bar{x}$.

3. P s'écrit $(P_1, P_2)_1$, où P_1 est un polyomino épais et P_2 un polyomino parallélogramme. Alors $h(P) = h(\partial(P_1))x\bar{x}s(g(P_2))$.

4. P s'écrit $(P_1, P_2)_2$, où P_1 est un polyomino épais et P_2 un polyomino parallélogramme non simple; le mot $g(P_2)$ admet une seule factorisation du type $xu\bar{x}v$, où u est un mot de Dyck non vide et v est un mot de Dyck.

Alors $h(P) = h(\partial(P_1))xu\bar{x}s(v)$.

DÉFINITION 4 : Soit u un mot de Dyck bilatère factorisé sous la forme $u = u_0s(v_0)u_1s(v_1)\dots u_{k-1}s(v_{k-1})u_k$, où $k \geq 0$ et :

- u_0 et u_k sont des mots de Dyck,
- u_1, \dots, u_{k-1} et v_0, \dots, v_{k-1} sont des mots de Dyck non vides.

Un *pseudo-pic* de u est un pic de l'un des mots v_i ou un pic de hauteur supérieure ou égale à deux de l'un des mots u_i .

PROPOSITION 5 : L'application h décrite dans la définition 3 est une bijection entre les polyominos convexes dirigés et les mots de Dyck bilatères. De plus, si

$h(P) = u$:

- le périmètre de P est la longueur de u , augmentée de quatre,
- la largeur de P est le nombre de pseudo-pics de u , augmenté de un.

Preuve : Décrivons tout d'abord la bijection réciproque de h .

Soit w un mot de Dyck bilatère de longueur $2n$, et supposons que l'on sache construire $h^{-1}(u)$ pour tous les mots u de longueur inférieure ou égale à $2(n-1)$.

1. Si $w = s(v)$, où v est un mot de Dyck, $h^{-1}(w)$ est le polyomino parallélogramme $g^{-1}(x\bar{x}v)$.
2. Si $w = w_1 x\bar{x}$, où w_1 est un mot de Dyck bilatère,

$$h^{-1}(w) = \partial^{-1} \circ h^{-1}(w_1).$$

3. Si $w = w_1 x\bar{x}s(v)$, où w_1 est un mot de Dyck bilatère et v un mot de Dyck non vide,

$$h^{-1}(w) = (\partial^{-1} \circ h^{-1}(w_1), g^{-1}(v))_1.$$

4. Enfin, si $w = w_1 xu\bar{x}s(v)$, où w_1 est un mot de Dyck bilatère, u un mot de Dyck non vide, et v un mot de Dyck,

$$h^{-1}(w) = (\partial^{-1} \circ h^{-1}(w_1), g^{-1}(xu\bar{x}v))_2.$$

Démontrons par récurrence le résultat relatif au périmètre. Rappelons que, si P est un polyomino parallélogramme, la longueur de $g(P)$ est le périmètre de P , diminué de deux. Soit P un polyomino convexe dirigé de périmètre $2n$.

Si $n=2$, P est réduit à une cellule : c'est donc un polyomino simple, et $h(P)$ est le mot vide, de longueur nulle.

Si $n \geq 3$, supposons avoir montré le résultat pour les polyominos de longueur $2i$, $1 \leq i \leq n-1$. Traitons séparément chacun des quatre cas envisagés dans la définition 3.

1. Le résultat est immédiat.
2. Le polyomino $\partial(P)$ est de périmètre $2n-2$ (Proposition 2). La longueur de $h(\partial(P))$ est $2n-6$, d'après l'hypothèse de récurrence, et donc $h(P)$ est de longueur $2n-4$.
3. Soit $2n_1$ le périmètre de P_1 et $2n_2$ celui de P_2 . Alors $2n = 2n_1 + 2n_2 - 2$. D'après l'hypothèse de récurrence, la longueur de $h(\partial(P_1))$ est $2n_1 - 6$. Celle de $g(P_2)$ est $2n_2 - 2$. Donc celle de $h(P)$ sera $2n_1 + 2n_2 - 6$, soit $2n - 4$.

4. Avec les mêmes notations que ci-dessus, $2n = 2n_1 + 2n_2 - 4$. D'après l'hypothèse de récurrence, la longueur de $h(\partial(P_1))$ est $2n_1 - 6$. Celle de $x\bar{u}\bar{x}s(v)$ est $2n_2 - 2$. Donc celle de $h(P)$ sera $2n_1 + 2n_2 - 8$, soit $2n - 4$.

La même récurrence permet de montrer l'assertion relative à la largeur, en utilisant le fait que, si P est un polyomino parallélogramme, la largeur de P est le nombre de pics de $g(P)$.

Exemple : Le polyomino P_0 ci-dessous est épais. Soit $P_1 = \partial(P_0)$. Alors $P_1 = (P_2, P_3)_2$. Le polyomino P_2 est épais. Le polyomino $P_4 = \partial(P_2)$ est simple. L'image par h du polyomino P_0 est le mot représenté par le chemin de Dyck bilatère suivant.

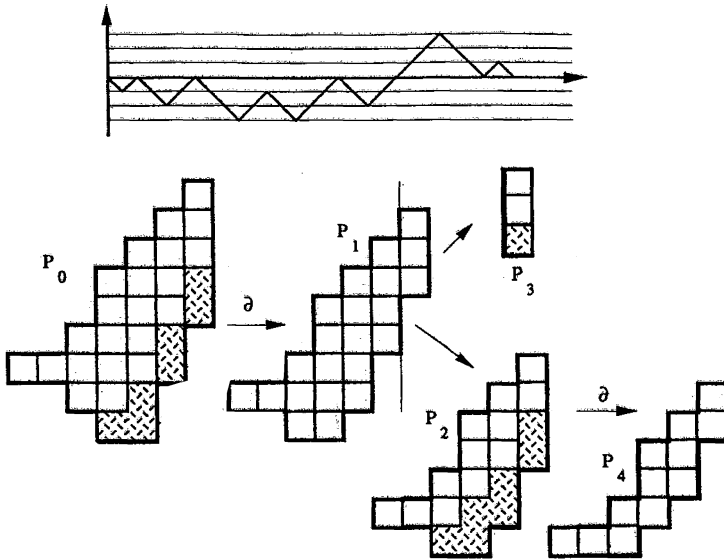


Figure 13. - La bijection h .

III. ÉNUMÉRATION

Notons $D(t^2, x)$ la série génératrice des mots de Dyck comptés suivant la longueur (par t) et le nombre de pics (par x).

De même, soit $D'(t^2, x)$ la série génératrice des mots de Dyck bilatères comptés suivant la longueur (par t) et le nombre de pseudo-pics (par x).

Soit enfin $Y(x, y, 1)$ la série génératrice des polyominos convexes dirigés comptés suivant la largeur et la hauteur (par x et y respectivement).

PROPOSITION 6 : Les valeurs des séries définies ci-dessus sont :

$$(i) \quad D(t^2, x) = \frac{1 + t^2(1-x) - \sqrt{1 - 2t^2(1+x) + t^4(1-x)^2}}{2t^2},$$

$$(ii) \quad D'(t^2, x) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2t^2(1+x) + t^4(1-x)^2}},$$

$$(iii) \quad Y(x, y, 1) = \frac{xy}{\sqrt{1 - 2x - 2y - 2xy + x^2 + y^2}}.$$

Preuve : (i) La série formelle des mots de Dyck vérifie l'équation

$$\underline{\mathcal{D}} = e + x \underline{\mathcal{D}} \bar{x} \underline{\mathcal{D}},$$

qui implique $D = 1 + t^2(x-1)D + t^2 D^2$.

Cette équation est algébrique de degré deux et son unique solution développable en série entière autour de zéro est la valeur de D annoncée en (i).

(ii) La série génératrice formelle des mots de Dyck bilatères satisfait l'équation

$$\underline{\mathcal{D}}' = s(\underline{\mathcal{D}}) + \underline{\mathcal{D}}' x \underline{\mathcal{D}} \bar{x} s(\underline{\mathcal{D}}),$$

où $s(\underline{\mathcal{D}})$ désigne la série formelle $\sum_{u \in \underline{\mathcal{D}}} s(u)$.

Il vient

$$D' = D + t^2 D' + t^2 D^2 D',$$

soit encore $D' = D/(1 - t^2 D^2)$, ce qui entraîne le second résultat.

(iii) D'après la proposition 5, la série génératrice des polyominos convexes dirigés comptés suivant le périmètre (par t) et la largeur (par x) est $t^4 x D'(t^2, x)$. En particulier, le nombre de polyominos convexes dirigés de périmètre $2n+4$ est $\binom{2n}{n}$.

Le changement de variables $(t^2, x) \rightarrow (y, x/y)$ mène alors à la série énumérant les polyominos convexes dirigés suivant la largeur et la hauteur, comptés respectivement par x et y .

BIBLIOGRAPHIE

- [Ba 1] R. BAXTER, Hard hexagons: exact solution, *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1980, 13, L 61-L 70.
- [Ba 2] R. BAXTER, Exactly solved models in statistical mechanics, Academic Press, New-York, 1982.
- [Bô-Vi] M. BOUSQUET-MÉLOU et X. G. VIENNOT, Empilements de segments et q -énumération de polyominos convexes dirigés, à paraître dans *J. Comb. Th. Series A*.
- [De-Du] M. P. DELEST et S. DULUCQ, Enumeration of directed column-convex animals with given perimeter and area, Rapport n° 86-15, Université Bordeaux-I, soumis à publication.
- [De-Vi] M. P. DELEST et X. G. VIENNOT, Algebraic languages and polyominoes enumeration, *Theor. Comp. Sci.*, 1984, 34, p. 169-206, North-Holland.
- [De-Na-Va] B. DERRIDA, J. P. NADAL et J. VANNIMENUS, Directed lattices animals in 2 dimensions: numerical and exact results, *J. Phys.*, 1982, 43, p. 1561.
- [Dh1] D. DHAR, Equivalence of the two-dimensional directed animal problem to Baxter hard-square lattice-gas model, *Phys. Rev. Lett.*, 1982, 49, p. 959-962.
- [Dh 2] D. DHAR, Exact solution of a directed-site animals enumeration in 3 dimensions, *Phys. Rev. Lett.*, 1983, 59, p. 853-856.
- [Fe] J. M. FEDOU, Exact formulas for fully compact animals, Rapport LaBRI n° 89-06, Université Bordeaux-I.
- [Ga] M. GARDNER, Mathematical games, *Scientific American*, 1958, sept. 182-192, nov. 136-142.
- [Go] S. GOLOMB, Polyominoes, Scribner, New York, 1965.
- [Go-Vi] D. GOUYOU-BEAUCHAMPS et X. G. VIENNOT, Equivalence of the two dimensional directed animal problem to a one-dimensional path problem, *Adv. in Appl. Math.*, 1988, 9, p. 334-357.
- [Ha-Na] V. HAKIM et J. P. NADAL, Exact result for 2D directed lattice animals on a strip of finite width, *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1983, 16, L 213-L 218.
- [Kl-Ri] D. A. KLARNER et R. L. RIVEST, A procedure for improving the upper bound for the number of n -ominoes, *Can. J. Math*, 1973, 25, p. 585-602.
- [Li-Ch] K. Y. LIN et S. J. CHANG, Rigourous results for the number of convex polygons on the square and honeycomb lattices, *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1988, 21, p. 2635-2642.
- [Pe 1] J. G. PENAUD, Une nouvelle bijection pour les animaux dirigés, Rapport LaBRI n° 89-45, Université Bordeaux-I, *Actes du 22^e Séminaire Lotharingien de Combinatoire*, Hesselberg, 1989, p. 93-130.
- [Pe 2] J. G. PENAUD, Animaux dirigés diagonalement convexes et arbres ternaires, Rapport LaBRI n° 90-62, Université Bordeaux-I.
- [Pe 3] J. G. PENAUD, Arbres et Animaux, Mémoire d'habilitation à diriger les recherches, Université Bordeaux-I, mai 1990.
- [Pr-Fo] V. PRIVMAN et G. FORGACS, Exact solution of the partially directed compact lattice animal model, *J. Phys. A : Math. Gen.*, 1987, 20, p. 543-547.
- [Pr-Sv] V. PRIVMAN et N. M. SVRAKIC, Exact generating function for fully directed compact lattice animals, *Phys. Rev. Lett.*, 1988, 60, n° 12, p. 1107-1109.
- [Vi] X. G. VIENNOT, Problèmes combinatoires posés par la physique statistique, *Séminaire Bourbaki*, n° 626, 36^e année, in *Astérisque*, n° 121-122, 1985, p. 225-246, Soc. Math. France.