SYMEON BOZAPALIDIS
ATHANASIOS ALEXANDRAKIS

Représentations matricielles des séries d'arbre reconnaissables

Informatique théorique et applications, tome 23, nº 4 (1989), p. 449-459.

<http://www.numdam.org/item?id=ITA_1989__23_4_449_0>

Informatique théorique et Applications/Theoretical Informatics and Applications
(vol. 23, n° 4, 1989, p. 449 à 459)

REPRÉSENTATIONS MATRICIELLES DES SÉRIES D'ARBRE RECONNAISSABLES (*)

par Symeon BOZAPALIDIS (1) et Athanasios ALEXANDRAKIS (1)

Communiqué par J. E. PIN

Résumé. – *On caractérise les séries d'arbre reconnaissables en utilisant des représentations matricielles; on montre en plus que l'image d'une telle représentation dont la dimension est minimale, est isomorphe à la* $\mathbb{K}$-Σ-*algèbre syntactique de la série induite. On prouve finalement que deux représentations matricielles minimales de la même série, sont similaires.*

Abstract. – *We characterize recognizable formal series on trees by means of matrix representations. Furthermore, we prove that the image of such a representation with minimum dimension is isomorphic to the syntactic* $\mathbb{K}$-Σ-*algebra of the induced series. Finally, we show that two minimal matrix representations of the same series, are "similar".*

0. INTRODUCTION

Une série d'arbre est reconnaissable si elle peut se réaliser par un automote multilinéaire d'arbre.

Berstel et Reutenauer ont prouvé que les séries d'arbre reconnaissables sont exactement les solutions de certains systèmes d'arbre canoniques et leurs feuillages constituent les séries algébriques ordinaires; en plus ils ont établi un « pumping lemma » concernant ces séries.

D'autre part, dans [2], on a construit la réalisation minimale d'une telle série. Dans ce papier on caractérise les séries d'arbre reconnaissables par des représentations matricielles et on montre que l'image d'une telle représentation de dimension minimale est isomorphe à la $\mathbb{K}$-Σ-algèbre syntactique de la série induite.

Deux représentations minimales de la même série, sont alors similaires.

(*) Reçu novembre 1987, version finale février 1988.
(1) Département des Mathématiques, Université de Thessalonique, Thessalonique, Grèce.

D'abord quelques préliminaires.

L'ensemble des arbres sur un alphabet gradué Σ, noté T_Σ, est la plus petite partie de Σ^* contenant Σ_0 et ayant la propriété.

$$\sigma \in \Sigma_n \text{ et } t_1, \ldots, t_n \in T_\Sigma \quad \text{implique} \quad \sigma t_1 \ldots t_n \in T_\Sigma.$$

Soient x une lettre ($\notin \Sigma$) et $T_\Sigma(x)$ l'ensemble des arbres sur l'alphabet gradué Σ', où

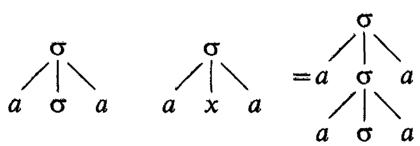
$$\Sigma'_0 = \Sigma_0 \cup \{x\}, \qquad \Sigma'_n = \Sigma_n, \qquad n \geqq 1.$$

Il est clair que $T_\Sigma(x)$ est un monoïde, sa multiplication étant la substitution à x.

Le sous-ensemble P_Σ de $T_\Sigma(x)$, constitué des arbres dans lesquelles la feuille x figure une seule fois, est un sous-monoïde libre de $T_\Sigma(x)$ engendré par les arbres de la forme

$$\sigma t_1 \ldots t_{i-1} x t_{i+1} \ldots t_n, \qquad \sigma \in \Sigma_n, \quad t_{ij} \in T_\Sigma$$

P_Σ opère sur T_Σ par substitution à x :



1. SÉRIES D'ARBRE RECONNAISSABLES

Soient $\mathbb{K}$ un corps et Σ un alphabet gradué fini. Une $\mathbb{K}$-Σ-*algèbre* est un corps $\mathscr{A} = (A, a)$ formé d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel A et d'une famille d'applications multilinéaires indexées par Σ:

$$a_\sigma\colon \quad \underbrace{A \times \ldots \times A}_{n\text{-fois}} \to A, \qquad \sigma \in \Sigma_n \quad (n \geqq 0).$$

Un *morphisme de* $\mathscr{A}=(A, a)$ vers $\mathscr{B}=(B, b)$ est une application linéaire $h: A \to B$ telle que pour tout $\sigma\in\Sigma_n$ le carré

$$\begin{array}{ccc} A\times\ldots\times A & \xrightarrow{a_\sigma} & A \\ {\scriptstyle h\times\ldots\times h}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h} \\ B\times\ldots\times B & \xrightarrow{b_\sigma} & B \end{array}$$

soit commutatif.

Notons $\mathbb{K}\langle T_\Sigma\rangle$ l'espace vectoriel engendré par l'ensemble T_Σ; alors $\mathbb{K}\langle T_\Sigma\rangle$ devient de manière canonique une $\mathbb{K}$-Σ-algèbre qui est initiale à la catégorie de ces algèbres. Plus précisément, pour chaque $\mathbb{K}$-Σ-algèbre $\mathscr{A}=(A, a)$ on a une application

$$H_{\mathscr{A}}:\quad T_\Sigma \to A$$

définie par les clauses

$$\begin{cases} H_{\mathscr{A}}(c)=a_c, \qquad c\in\Sigma_0 \\ H_{\mathscr{A}}(\sigma t_1\ldots t_n)=a_\sigma(H_{\mathscr{A}}t_1, \ldots, H_{\mathscr{A}}t_n)\end{cases}.$$

L'extension linéaire de cette application

$$\bar{H}_{\mathscr{A}}:\quad \mathbb{K}\langle T_\Sigma\rangle\to A, \qquad \bar{H}_{\mathscr{A}}(\Sigma k_i t_i)=\Sigma k_i H_{\mathscr{A}}(t_i)$$

est en fait l'unique morphism de la $\mathbb{K}$-Σ-algèbre $\mathbb{K}\langle T_\Sigma\rangle$ vers $\mathscr{A}$.

Le monoïde P_Σ opère alors sur $\mathscr{A}$ via

$$q.\sigma(t_1, \ldots, t_{i-1}\, x\, t_{i+1}\ldots t_n) = a_\sigma(H_{\mathscr{A}}t_1, \ldots, H_{\mathscr{A}}t_{i-1}, q, H_{\mathscr{A}}t_{i+1}, \ldots, H_{\mathscr{A}}t_n)$$

et cette opération se prolonge linéairement en une opération

$$A\times\mathbb{K}\langle P_\Sigma\rangle\to A$$

$\mathbb{K}\langle P_\Sigma\rangle$ étant l'algèbre (ordinaire) du monoïde P_Σ.

Désormais, on considère seulement des $\mathbb{K}$-Σ-algèbres $\mathscr{A}$ pour lesquelles $\bar{H}_{\mathscr{A}}$ soit surjective.

Soit $\mathscr{A}=(A, a)$ une telle algèbre; un sous-espace $\mathfrak{A}$ de A qui a la propriété

$$q\in\mathfrak{A} \quad \& \quad \tau\in P_\Sigma \;\Rightarrow\; q\tau\in\mathfrak{A}$$

est appelé *idéal* de $\mathscr{A}$.

L'importance de cette notion se trouve à la proposition qui suit :

PROPOSITION 1 : *Pour tout idéal* $\mathfrak{A}$ *de* $\mathscr{A}$ *l'équivalence*

$$q_1 \equiv q_2 (R_{\mathfrak{A}}) \quad ssi \quad q_1 - q_2 \in \mathfrak{A}$$

est compatible avec les Σ*-opérations, donc l'ensemble quotient* $A/R_{\mathfrak{A}}$ *(noté simplement* $A/\mathfrak{A}$*) devient une* $\mathbb{K}$*-*Σ*-algèbre et la projection canonique* $A \to A/\mathfrak{A}$ *un* $\mathbb{K}$*-*Σ*-morphisme.*

Preuve : Il faut montrer que

$$q_i \equiv q_i' (R_{\mathfrak{A}}) \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \qquad \text{et} \qquad \sigma \in \Sigma_n$$

implique

$$a_\sigma (q_1, \ldots, q_n) \equiv a_\sigma (q_1', \ldots, q_n') (R_{\mathfrak{A}})$$

Choisissons $P_i \in \mathbb{K} \langle T_\Sigma \rangle$ tels que

$$\bar{H}_{\mathscr{A}} (P_i) = q_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

et soit

$$P_i = \sum_{j=1}^{K} K_{ji} t_j, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Alors

$$\begin{aligned} &a_\sigma (q_1, q_2, \ldots, q_n) - a_\sigma (q_1', q_2, \ldots, q_n) \\ &\qquad = a_\sigma (q_1, \bar{H}_{\mathscr{A}} P_2, \ldots, \bar{H}_{\mathscr{A}} P_n) - a_\sigma (q_1', \bar{H}_{\mathscr{A}} P_2, \ldots, \bar{H}_{\mathscr{A}} P_n) \\ &\qquad\qquad = (q_1 - q_1') \sum_{j_2, \ldots, j_n} K_{j_2, 2} \ldots K_{j_n, 2} \ldots K_{j_n, n} \sigma (x t_{j_2} \ldots t_{j_n}) \end{aligned}$$

Comme $q_1 \equiv q_1' (R_{\mathfrak{A}})$, la différence $q_1 - q_1' \in \mathfrak{A}$; $\mathfrak{A}$ étant un idéal, la somme dernière appartient à $\mathfrak{A}$, et cela montre que

$$a_\sigma (q_1, q_2, \ldots, q_n) \equiv a_\sigma (q_1', q_2, \ldots, q_n) (R_{\mathfrak{A}}).$$

De la même façon

$$a_\sigma (q_1', q_2, \ldots, q_n) \equiv a_\sigma (q_1', q_2', \ldots, q_n) \equiv \ldots \equiv a_\sigma (q_1', \ldots, q_n'). \quad \blacksquare$$

Une *réalisation* d'une série d'arbre $S: T_\Sigma \to \mathbb{K}$ est un couple $(\mathscr{A}, \varphi)$ formé d'une $\mathbb{K}$-Σ-algèbre $\mathscr{A} = (A, a)$ et d'une forme linéaire $\varphi: A \to \mathbb{K}$ de façon que le triangle

$$\begin{tikzcd} \mathbb{K}\langle T_\Sigma\rangle \arrow[d, "\bar{S}"'] \arrow[dr, "\bar{H}_{\mathscr{A}}"] & \\ \mathbb{K} & \mathscr{A} \arrow[l, "\varphi"] \end{tikzcd}$$

soit commutatif ($\bar{S}$ désigne l'extension linéaire de S).

$S: T_\Sigma \to \mathbb{K}$ sera dite *reconnaissable* si elle peut se réaliser par un couple $(\mathscr{A}, \varphi)$, où l'espace sous-jacent à $\mathscr{A}$ est de dimension fini.

A toute série $S: T_\Sigma \to \mathbb{K}$, on associe *l'idéal syntactique*

$$\mathfrak{A}_S = \{ Q/(\bar{S}, Q\,\tau) = 0, \ \forall \tau \in P_\Sigma \}.$$

Le quotient $\mathscr{A}_S = \mathbb{K}\langle T_S\rangle/\mathfrak{A}_S$ est *l'algèbre syntactique* de S (dans le cas d'un alphabet nomadique, on retrouve la notion de l'algèbre syntactique d'une série ordinaire, v. [3]). Comme $\mathfrak{A}_S \subseteqq \mathrm{Ker}\bar{S}$, $\bar{S}$ induit une forme linéaire $\varphi_S: \mathscr{A}_S \to \mathbb{K}$ telle que le triangle

$$\begin{tikzcd} \mathbb{K}\langle T_Z\rangle \arrow[d, "\bar{S}"'] \arrow[dr, "\bar{H}_{\mathscr{A}_S}"] & \\ \mathbb{K} & \mathscr{A}_s \arrow[l, "\varphi_S"] \end{tikzcd}$$

soit commutatif.

La réalisation ci-dessusus de S est en fait (co)universelle, c'est-à-dire pour toute réalisation $(\mathscr{A}, \varphi)$ de S, il existe un seul $\mathbb{K}$-Σ-morpxisme $\omega: \mathscr{A} \to \mathscr{A}_S$ faisant commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{K}\langle T_\Sigma\rangle \arrow[dl, "\bar{H}_{\mathscr{A}}"'] \arrow[dr, "\bar{H}_{\mathscr{A}_S}"] \arrow[dd, "\bar{S}"] & \\ \mathscr{A} \arrow[rr] \arrow[dr, "\varphi"'] & & \mathscr{A}_s \arrow[dl, "\varphi_S"] \\ & \mathbb{K} & \end{tikzcd}$$

PROPOSITION 2 : *Pour une série $S: T_\Sigma \to \mathbb{K}$ les conditions suivantes sont équivalentes*

(i) *S est reconnaissable*

(ii) *$\mathscr{A}_S$ est de dimension finie.* ■

Dans [2] on a considéré V_S, le sous-espace de $\mathbb{K}^{P_\Sigma}$ engendre par les $t^{-1} S$:

$$V_S = \langle t^{-1} S / t \in T_\Sigma \rangle$$

où $t^{-1} S : P_\Sigma \to \mathbb{K}$ est définie par

$$(t^{-1} S, \tau) = (S, t\tau), \qquad \forall \tau \in P_\Sigma.$$

V_S est en réalité une $\mathbb{K}$-Σ-algèbre si pour tout $\sigma \in \Sigma_n (n \geqq 0)$ on pose

$$v_\sigma (t_1^{-1} S, \ldots, t_n^{-1} S) = (\sigma t_1 \ldots t_n)^{-1} S.$$

PROPOSITION 3 : $\mathscr{A}_S \cong V_S$.

Preuve : L'application

$$h : \mathbb{K} \langle T_\Sigma \rangle \to V_S, \qquad h(P) = P^{-1} S$$

est un $\mathbb{K}$-Σ-épimorphisme; son noyau est exactement l'idéal syntactique $\mathfrak{A}_S$, donc

$$\mathscr{A}_S = \mathbb{K} \langle T_\Sigma \rangle / \mathfrak{A}_S \cong V_S. \quad \blacksquare$$

2. SÉRIES D'ARBRE REPRÉSENTABLES

Soient $\mathbb{K}$ un corps et Σ un alphabet gradué fini.

Une *$\mathbb{K}$-Σ-représentation de dimension n* est un triplet $k = (\varphi, \psi, \gamma)$ formé d'un vecteur $\gamma \in \mathbb{K}^n$, d'un morphisme de monoïdes $\varphi : P_\Sigma \to \mathbb{K}^{n \times n}$ et d'une application $\psi : \Sigma_0 \to \mathbb{K}^n$; ces données sont assujetties à vérifier la condition suivante

$$c\tau = c'\tau' \;\Rightarrow\; \psi(c)\varphi(\tau) = \psi(c')\varphi(\tau') \qquad (\bigstar)$$
$$c, c' \in \Sigma_0 \quad \text{et} \quad \tau . \tau' \in P_\Sigma.$$

Toute représentation $k = (\varphi, \psi, \gamma)$ définit une série formelle d'arbre $S_k : T_\Sigma \to \mathbb{K}$ par

$$(S_k, t) = k(t)\gamma, \qquad \forall t \in T_\Sigma$$

où la fonction $k : T_\Sigma \to \mathbb{K}^n$ est donnée par

$$k(t) = \psi(c)\varphi(\tau), \qquad t = c\tau, \quad c \in \Sigma_0, \quad \tau \in P_\Sigma.$$

Une série S est dite *représentable* s'il existe $k = (\varphi, \psi, \gamma)$ telle que $S = S_k$.

Exemple : Soit $f \in \Sigma_n$ ($n \geqq 1$); pour tout $\tau \in P_\Sigma$ notons $|\tau|_f$ le nombre d'occurences de f à τ. Il est facile de constater que les asseignements

$$\tau \xrightarrow{\varphi} \begin{pmatrix} 1-|\tau|_f & |\tau|_f \\ -|\tau|_f & 1+|\tau|_f \end{pmatrix} \in \mathbf{Q}^{2\times 2}$$

$$c \xrightarrow{\psi} (1\ 1), \qquad \forall c \in \Sigma_0$$

ainsi que le vecteur

$$\gamma = \begin{pmatrix} -1/4 \\ 1/4 \end{pmatrix}$$

constituent une $\mathbf{Q}$-Σ-représentation de dimension 2; la série induite, à chaque $t \in T_\Sigma$ associe le nombre des symboles f figurant dans t (v. [1], p. 121).

THÉORÈME 1 : *Toute série reconnaissable $S : T_\Sigma \to \mathbb{K}$ elle est aussi représentable.*

Preuve : Choisissons une base

$$t_1^{-1} S, \ldots, t_n^{-1} S$$

de l'espace vectoriel V_S (*voir* prop. 2 et 3).

Pour tout $\tau \in P_\Sigma$ on pose

$$(t_i \tau)^{-1} S = \sum_{j=1}^{n} \varphi(\tau)_{ij} (t_j^{-1} S) \tag{1}$$

et pour tout $c \in \Sigma_0$, on pose

$$c^{-1} S = \sum_{j=1}^{n} \psi(c)_j (t_j^{-1} S). \tag{2}$$

On va montrer que les $\varphi : P_\Sigma \to \mathbb{K}^{n\times n}$ et $\psi : \Sigma_0 \to \mathbb{K}^n$ ainsi définis vérifient la condition de représentabilité ($\bigstar$); en effet si l'on a $t = c\tau$ ($c \in \Sigma_0$ et $t \in R_S$)

alors

$$t^{-1}S=(c\tau)^{-1}S=\tau^{-1}(c^{-1}S)\overset{(2)}{=}\tau^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n}\psi(c)_j(t_j^{-1}S)\right)$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\psi(c)_j\tau^{-1}(t_j^{-1}S)=\sum_{j=1}^{n}\psi(c)_j(t_j\tau)^{-1}S$$

$$\overset{(1)}{=}\sum_{j=1}^{n}\psi(c)_j\left(\sum_{K=1}^{n}\varphi(\tau)_{jK}(t_K^{-1}S)\right)=\sum_{K=1}^{n}[\psi(c)\varphi(\tau)]_K(t_K^{-1}S)$$

ce qui montre que les scalaires $[\psi(c)\varphi(\tau)]_K$ $(K=1, \ldots, n)$ constituent les composantes du vecteur $t^{-1}S$ par rapport à la base $t_1^{-1}S, \ldots, t_n^{-1}S$, donc elles sont indépendantes de la factorisation $t=c\tau$. On choisit finalement

$$\gamma_i=(S, t_i), \qquad i=1, \ldots, n. \tag{3}$$

Pour tout $t=c\tau$ on a alors

$$(S, t)=(t^{-1}S, x)=\left(\sum_{K=1}^{n}[\psi(c)\varphi(\tau)]_K(t_K^{-1}S), x\right)$$

$$=\sum_{K=1}^{n}[\psi(c)\varphi(\tau)]_K(t_K^{-1}S, x)$$

$$=\sum_{K=1}^{n}[\psi(c)\varphi(\tau)]_K(S, t_K)\overset{(3)}{=}\psi(c)\varphi(\tau)\gamma=(S_k, t)$$

(x désigne l'élément unité du monoïde P_Σ) donc $S=S_k$ et par suite la série S est représentable. ■

THÉORÈME 2 : *Toute série représentable, elle est aussi réconnaissable.*

Preuve : Considérons une $\mathbb{K}$-Σ-représentation $k=(\varphi, \psi, \gamma)$ de dimension n et soient

$$\bar{k}: \mathbb{K}\langle T_\Sigma\rangle \to \mathbb{K}^n \qquad \text{et} \qquad \bar{\varphi}: \mathbb{K}\langle P_\Sigma\rangle \to \mathbb{K}^{n\times n}$$

les extensions linéaires de k et φ respectivement.

Il est facile de constater que pour chaque $P\in\mathbb{K}\langle T_\Sigma\rangle$ et chaque $T\in\mathbb{K}\langle P_\Sigma\rangle$ on a

$$\bar{k}(PT)=\bar{k}(P)\bar{\varphi}(T). \tag{4}$$

Maintenant, nous allons munir l'espace vectoriel

$$\mathrm{Im}(\bar{k}) \subseteq \mathbb{K}^n$$

d'une structure de $\mathbb{K}$-Σ-algèbre. Pour cela on définit l'application

$$\mu_\sigma : \mathrm{Im}(\bar{k})^n \to \mathrm{Im}(\bar{R}), \qquad \sigma \in \Sigma_n$$

par

$$\mu_\sigma(m_1, \ldots, m_n) = \bar{k}(\sigma(P_1, \ldots, P_n))$$

où $m_i \in \mathrm{Im}(\bar{k})$ et les $P_i \in \mathbb{K} \langle T_\Sigma \rangle$ sont choisis de façon que

$$\bar{k}(P_i) = m_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Soient $P'_i \in \mathbb{K} \langle T_\Sigma \rangle$ tels que

$$\bar{k}(P_i) = \bar{k}(P'_i), \qquad i = 1, 2, \ldots, n \tag{5}$$

et

$$P_i = \sum_j \mathrm{K}_{ji} t_j, \qquad P'_i = \sum_j \lambda_{ji} t_j, \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

alors

$$\begin{aligned}\bar{k}(\sigma(P_1, P_2, \ldots, P_n)) &= \bar{k}[P_1 \sigma(x, P_2, \ldots, P_n)] \\ &\overset{(4)}{=} \bar{k}(P_1)\bar{\varphi}[\sigma(x, P_2, \ldots, P_n)] \overset{(5)}{=} \bar{k}(P'_1)\bar{\varphi}[\sigma(x, P_2, \ldots, P_n)] \\ &\overset{(4)}{=} \bar{k}(\sigma(P'_1, P_2, \ldots, P_n)) = \ldots = \bar{k}(\sigma(P'_1, P'_2, \ldots, P'_n))\end{aligned}$$

où

$$\sigma(x, P_2, \ldots, P_n) = \sum_{j_2, \ldots, j_n} \mathrm{K}_{j_2, 2} \ldots \mathrm{K}_{j_n, n} \sigma(x t_{j_2} \ldots t_{j_n}).$$

Cela montre le bien défini de l'opération μ_0. De la discussion précédente résulte que $\bar{k} : \mathbb{K} \langle T_\Sigma \rangle \to Im(\bar{k})$ est un $\mathbb{K}$-Σ-morphisme, par conséquent $\bar{k} = \bar{H}_{\mathrm{Im}(k)}$.

De l'autre côté, on définit la forme linéaire $\varphi_k : \mathrm{Im}(\bar{k}) \to \mathbb{K}$ par $\varphi_k(\alpha) = \alpha\gamma$, $\forall \alpha \in \mathrm{Im}(\bar{k}) \subseteq \mathbb{K}^n$.

Le couple $(\mathrm{Im}(\bar{k}), \varphi_k)$ est une réalisation de dimension finie de S_k cdt.

$$(S_k, t) = k(t)\gamma = \varphi_k(\bar{k}(t)).$$

La série S_k est donc reconnaissable. ■

COROLLAIRE : *Si $k_{\min}$ est une représentation de la série S de dimension minimale, alors la $\mathbb{K}$-Σ-algèbre* $\operatorname{Im}(\bar{k}_{\min})$ *est isomorphe à l'algèbre syntactique $\mathscr{A}_S$.*

Preuve : Notons n la dimension de $k_{\min}$; du théorème ci-dessus et de la proposition 2 découle.

$$\dim \mathscr{A}_S \leqq \dim \operatorname{Im}(\bar{k}_{\min}) \leqq n.$$

En utilisant le théorème 1, on construit une représentation de S dont la dimension est égale à $\dim V_S = \dim \mathscr{A}_S$; n étant minimale, on obtient

$$n \leqq \dim \mathscr{A}_S$$

d'où l'égalité.

$$\dim \mathscr{A}_S = \dim \operatorname{Im}(\bar{k}_{\min}). \tag{6}$$

D'autre part, l'inclusion

$$\operatorname{Ker} \bar{k}_{\min} \subseteqq \mathfrak{A}_S$$

($\mathfrak{A}_S$ l'idéal syntactique de S) induit un épimorphisme de $\mathbb{K}$-Σ-algèbres

$$\operatorname{Im}(\bar{k}_{\min}) \cong \mathbb{K}\langle T_\Sigma \rangle / \operatorname{Ker} \bar{k}_{\min} \to \mathbb{K}\langle T_\Sigma \rangle / \mathfrak{A}_S = \mathscr{A}_S$$

qui à cause de (6) est bijectif. ■

La proposition qui suit compare des représentations minimales de la même série.

PROPOSITION 4 : *Étant donné deux représentations de la série S*

$$k = (\varphi, \psi, \gamma) \qquad et \qquad k' = (\varphi', \psi', \gamma')$$

de dimension minimale n, il existe une matrice inversible U telle que

$$\varphi'(\tau) = U^{-1} \varphi(\tau) U, \qquad \forall \tau \in P_\Sigma \tag{i}$$

$$\psi'(c) = \psi(c) U, \qquad \forall c \in \Sigma_0 \tag{ii}$$

$$\gamma' = U^{-1} \gamma. \tag{iii}$$

Preuve : Comme k et k' sont de dimension minimale n, on aura

$$\operatorname{Im}(\bar{k}) = \operatorname{Im}(\bar{k}') = \mathbb{K}^n.$$

D'après le corollaire précédent, il existe un endomorphisme inversible $v: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ faisant commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{K}\langle T_\Sigma \rangle \arrow[dl, "\bar{k}"'] \arrow[dr, "\bar{k}'"] & \\ \mathbb{K}^n \arrow[rr, "\sim"] & & \mathbb{K}^n \end{tikzcd}$$

En désignant par U la matrice de v à la base standard de $\mathbb{K}^n$, il vient que

$$k'(t) = k(t)\,U, \qquad \forall\, t \in T_\Sigma. \tag{7}$$

Prouver (i) revient à prouver

$$k(t)\,\varphi(\tau)\,U = k(t)\,U\,\varphi'(\tau), \qquad \forall\, t \in T_\Sigma$$

car les vecteurs $k(t)$ engendrent l'espace $\mathbb{K}^n (=\operatorname{Im} \bar{k})$; on a

$$k(t)\,\varphi(\tau)\,U = k(t\,\tau)\,U \overset{(7)}{=} k'(t\,\tau) = k'(t)\,\varphi'(\tau) \overset{(7)}{=} k(t)\,U\,\varphi'(\tau).$$

L'égalité (ii) resulte de (7) en mettant $t = c \in \Sigma_0$. On obtient finalement (3), en utilisant des arguments analogues. ■

Remarque : Les théorèmes 1 et 2 restent valables si l'on remplace le corps $\mathbb{K}$ par un anneau Noetherien, mais c'est une question ouverte si les notions de représentabilité et de reconaissabilité sont équivalentes dans le cas d'un anneau quelconque.

BIBLIOGRAPHIE

1. J. Berstel et C. Reutenauer, *Recognizable Formal Power Series on Trees*, Theoret. Comput. Sci., vol. 18, 1982, p. 115-148.
2. S. Bozapalidis et O. Louscou-Bozapalidou, *The Rank of a Formal Tree Power Series*, Theoret. Comput. Sci., vol. 27, 1983, p. 211-215.
3. C. Reutenauer, *Séries formelles et algèbres syntactiques*, Journal of Algebra, vol. 66, 1980, p. 448-483.