INFORMATIQUE THÉORIQUE ET APPLICATIONS

J.-P. ALLOUCHE
J. BETREMA
J. O. SHALLIT

Sur des points fixes de morphismes d'un monoïde libre

Informatique théorique et applications, tome 23, nº 3 (1989), p. 235-249.

<http://www.numdam.org/item?id=ITA_1989__23_3_235_0>

Informatique théorique et Applications/Theoretical Informatics and Applications
(vol. 23, n° 3, 1989, p. 235 à 249)

SUR DES POINTS FIXES DE MORPHISMES D'UN MONOÏDE LIBRE (*)

par J.-P. ALLOUCHE (1), J. BETREMA (1) et J. O. SHALLIT (2)

Communiqué par J. BERSTEL

Résumé. – *Nous montrons d'abord que la suite des parenthèses qui permet de définir de façon récursive les entiers naturels est point fixe du morphisme $a \to aab$, $b \to b$ sur le monoïde $\{a, b\}^*$. Nous donnons ensuite des propriétés arithmétiques de cette suite. Enfin nous appliquons les méthodes de la première partie à d'autres suites infinies, ce qui nous permet de prouver un cas particulier d'une conjecture de Mendès France : il existe une série formelle algébrique sur le corps des fractions rationnelles modulo 3, qui n'est ni rationnelle ni quadratique, et dont la suite des quotients partiels est engendrée par un 3-automate.*

Abstract. – *We first show that the sequence of parentheses occurring in the recursive definition of the integers is a fixed point of the morphism $a \to aab$, $b \to b$ on the monoid $\{a, b\}^*$. We give arithmetic properties of this sequence. Finally we apply the methods of the first part to other infinite sequences, proving a particular case of a conjecture by Mendès France: there exists a formal series, algebraic over the field of rational functions modulo 3, which is neither rational nor quadratic, and whose sequence of partial quotients is generated by a 3-automaton.*

INTRODUCTION

Avec von Neumann les logiciens définissent les entiers naturels par (*voir* [3] par exemple) :

$$A_0 = \varnothing = \{\}$$
$$A_1 = \{\varnothing\} = \{\{\}\}$$
$$A_2 = \{\varnothing, \{\varnothing\}\} = \{\{\}, \{\{\}\}\}$$
$$\dots$$
$$A_{n+1} = A_n \cup \{A_n\}.$$

(*) Reçu avril 1987, version finale en décembre 1987.

(1) U.A. n° 226, U.E.R. de Mathématique et d'Informatique, 351, cours de La Libération, 33405 Talence Cedex, France.
(2) Department of Computer Science, University of Chicago, 1100 E. 58th street, Chicago, IL 60637, U.S.A. (Present address: Dartmouth College, Hanover, NH 03755, U.S.A.)

En remplaçant les symboles { et } respectivement par a et b, nous pouvons écrire, en oubliant les virgules :

$$A_0 = ab$$

$$A_1 = aabb$$

$$A_2 = aabaabbb$$

$$\ldots$$

$$A_{n+1} = aA_0A_1 \ldots A_nb.$$

Nous montrerons d'abord que la suite des mots A_n converge vers une suite infinie A lorsque n tend vers $+\infty$ et que cette suite est point fixe du morphisme $a \to aab$, $b \to b$. Nous établirons ensuite des propriétés arithmétiques de cette suite : par exemple si l'on écrit

$$A = u(0)\,u(1)\,u(2)\ldots,$$

alors $u(n) = a$ si et seulement si n est de la forme $\Sigma\,\varepsilon_j(2^j - 1)$, où les ε_j valent 0 ou 1.

La méthode utilisée pour montrer que A est point fixe d'un morphisme va nous permettre de retrouver que la suite de Thue-Morse, que la suite de pliage régulier de papier (*voir* [4]), ainsi que la suite des déplacements dans le problème des tours de Hanoi (*voir* [1]) sont automatiques (c'est-à-dire images de points fixes de morphismes uniformes, *voir* [4]). De plus nous montrerons que la suite des quotients partiels d'un développement en fraction continue donné dans [7] est automatique; ceci donne un cas particulier non trivial d'une conjecture de Mendès-France :

CONJECTURE : *Si une série formelle $\Sigma\, a_n X^{-n}$ est algébrique sur un corps de fractions rationnelles sur un corps fini (ce qui signifie que la suite (a_n) est automatique, voir* [4]), *et si la suite des quotients partiels de son développement en fraction continue est à valeurs dans un ensemble fini, alors cette dernière suite est aussi automatique.*

Cette conjecture est évidemment vraie pour une série formelle rationnelle, ainsi que pour une série formelle quadratique (la suite des quotients partiels est alors ultimement périodique); le lecteur pourra trouver une esquisse de la théorie des fractions continues pour les séries formelles sur un corps fini par exemple dans [2].

I. LA SUITE DE VON NEUMANN

Comme indiqué dans l'introduction, une définition récursive des entiers naturels est associée à des mots A_n sur l'alphabet $\{a, b\}$ vérifiant:

$$A_0 = ab,$$
$$\forall n \geqq 0, \quad A_{n+1} = aA_0A_1 \ldots A_nb.$$

1. THÉORÈME 1 : *La suite des mots A_n tend vers une suite infinie A, que nous appellerons la suite de von Neumann. Cette suite est point fixe du morphisme $a \to aab$, $b \to b$.*

En effet, il résulte immédiatement de la définition des mots A_n que:

$$\forall n \geqq 0, \quad A_n = B_n b, \qquad \text{où} \quad B_0 = a$$

et

$$\forall n \geqq 1, \quad B_n = a A_0 A_1 \ldots A_{n-1}.$$

On en tire:

$$\forall n \geqq 0, \quad B_{n+1} b = A_{n+1} = a A_0 A_1 \ldots A_n b = B_n A_n b = B_n B_n bb.$$

autrement dit, les mots B_n sont définis par:

$$B_0 = a$$
$$B_{n+1} = B_n B_n b.$$

Comme B_n est préfixe de B_{n+1} on en déduit que B_n tend vers un mot infini A, donc il est clair que $A_n = B_n b$ tend aussi vers A.

Si l'on note alors σ le morphisme $a \to aab$, $b \to b$, on vérifie que

$$B_1 = aab = \sigma(a) = \sigma(B_0),$$

puis que, si $B_{n+1} = \sigma(B_n)$, alors successivement:

$$B_{n+2} = B_{n+1} B_{n+1} b = \sigma(B_n) \sigma(B_n) \sigma(b) = \sigma(B_n B_n b) = \sigma(B_{n+1}).$$

Ceci prouve que, quel soit l'entier n, on a $B_{n+1} = \sigma(B_n)$.

D'où, en faisant tendre n vers l'infini: $\sigma(A) = A$.

Les premiers termes de la suite A sont donnés par:

$$A = aabaabbaabaabbbaabaabbaabaabbbb \ldots$$

Nous allons maintenant montrer des propriétés arithmétiques de la suite A, pour cela nous aurons d'abord besoin d'un lemme:

2. LEMME : *Soit n un entier positif ou nul; les propriétés suivantes sont équivalentes*:

(*a*) *il existe des ε_j à valeur 0 ou 1, tels que*:

$$n=\sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j (2^j-1)$$

(*une telle décomposition, si elle existe, est unique*);

(*b*) *il existe un entier m positif ou nul tel que*:

$$n=m-s_2(m),$$

où $s_2(m)$ est la somme des chiffres de m écrit en base 2;

(*c*) *il existe un entier j positif ou nul tel que*:

$$n=3j+v_2(j!) \qquad ou \qquad n=1+3j+v_2(j!),$$

où $v_2(k)$ est l'exposant de la plus grande puissance de 2 qui divise k.

L'ensemble des entiers vérifiant l'une de ces conditions sera noté V.

L'équivalence entre (*a*) et (*b*) s'obtient immédiatement en écrivant l'entier m en base 2;

L'équivalence entre (*b*) et (*c*) s'obtient en établissant d'abord que pour tout entier j positif ou nul on a:

$$s_2(j)+v_2(j!)=j$$

(on vérifie cette égalité pour j valant 0 ou 1 puis on montre facilement que si une telle égalité est vraie pour l'entier j elle est aussi vraie pour $2j$ et $2j+1$).

On déduit alors de cette relation que, quel que soit j positif ou nul, on a:

$$3j+v_2(j!)=4j-s_2(4j)=4j+1-s_2(4j+1)$$
$$1+3j+v_2(j!)=4j+2-s_2(4j+2)=4j+3-s_2(4j+3).$$

Nous pouvons alors énoncer:

3. THÉORÈME 2 : *La suite $A=(u(n))_{n\geq 0}$ a les propriétés suivantes:*

(*a*) *Si l'on note α^k la concaténation de k mots égaux à α, et f la fonction définie par $f(j)=1+v_2(j)$, alors*

$$A=a^2\, b^{f(1)}\, a^2\, b^{f(2)}\, a^2\, b^{f(3)} \ldots$$

(*b*) *En appelant* V *l'ensemble d'entiers défini à la fin du lemme ci-dessus, on a*:

$$u(n)=a \qquad si \quad n \text{ est dans } V,$$
$$u(n)=b \qquad si \quad n \text{ n'est pas dans } V.$$

Il suffit de prouver le (*a*) car le (*b*) est alors immédiat [remarquer que $v_2(j!)=v_2(1)+v_2(2)+\ldots+v_2(j)$].

Pour prouver le (*a*), définissons la suite C par:

$$C=a^2 b^{f(1)} a^2 b^{f(2)} a^2 b^{f(3)}\ldots$$

et calculons la suite $\sigma(C)$ où σ est la substitution

$$a \to aab, \qquad b \to b.$$

On obtient:

$$\sigma(C)=a^2 b^{g(1)} a^2 b^{g(2)} a^2 b^{g(3)}\ldots$$

où:

$$g(2i+1)=1=f(2i+1)$$
$$g(2i)=1+f(i)=f(2i).$$

Il est alors clair que $g=f$, donc que $\sigma(C)=C$ et par conséquent que $C=A$ puisque σ n'a qu'un point fixe infini.

4. LA SUITE A N'EST PAS 2-AUTOMATIQUE: Nous nous proposons de montrer ici que cette suite n'est pas 2-automatique (autrement dit elle n'est pas image d'un point fixe d'un morphisme uniforme de longueur 2, *voir* par exemple [4] ou [5]).

Pour cela nous aurons besoin d'un lemme:

LEMME : *Si l'on pose* $x(j)=3j+v_2(j!)$, *alors quels que soient les entiers* l *et* m, *on a*:

$$x(2^l m)=2^{l+2} m-m+v_2(m!),$$
$$x(2^l m-1)=2^{l+2} m-l-m-3+v_2((m-1)!).$$

La démonstration est immédiate dès que l'on a remarqué que l'on a:

$$v_2((2^l m)!)=\sum_{k=1}^{\infty} [2^l m/2^k]=(2^l-1)m+v_2(m!).$$

THÉORÈME : *La suite A n'est pas 2-automatique.*

Nous allons montrer que, pour k supérieur ou égal à 2, toutes les sous-suites $n \to u(2^k n + 2^k - k)$ sont distinctes, alors que la 2-automaticité impliquerait (*voir* [4] ou [5]) que l'ensemble E de sous-suites défini par:

$$E = \{ n \to u(2^k n + a);\, k \geqq 0,\, 0 \leqq a \leqq 2^k - 1 \}$$

est fini.

Plus précisément, nous allons montrer que, quel que soit k supérieur ou égal à 2,

$$\text{pour} \quad n = 0, 1, 2 \ldots, 2^k - 3, \qquad u(2^k n + 2^k - k) = b,$$
$$\text{pour} \quad n = 2^k - 2, \qquad u(2^k n + 2^k - k) = a,$$

en utilisant une des propriétés de u données au théorème 2:
si $k \geqq 2$ et $0 \leqq n \leqq 2^k - 3$, on a respectivement:

$$\begin{aligned} x(2^{k-2}(n+1)) &= 2^k n + 2^k + (v_2((n+1)!) - (n+1)) \\ &= 2^k n + 2^k - s_2(n+1) \\ &> 2^k n + 2^k - k; \\ x(2^{k-2}(n+1) - 1) &= 2^k n + 2^k - k - 2 + (v_2(n!) - n) \\ &= 2^k n + 2^k - k - 2 - s_2(n) \\ &\leqq 2^k n + 2^k - k - 2. \end{aligned}$$

Autrement dit, pour les entiers n compris entre 0 et $2^k - 3$, on a:

$$x(2^{k-2}(n+1) - 1) < 1 + x(2^{k-2}(n+1) - 1) < 2^k n + 2^k - k < x(2^{k-2}(n+1)).$$

Comme la suite $x(j)$ est strictement croissante et que $u(n)$ vaut a si et seulement si n est de la forme $x(j)$ ou $1 + x(j)$, on en déduit:

$$\forall k \geqq 2, \quad \forall n \in [0, 2^k - 3], \qquad u(2^k n + 2^k - k) = b.$$

Enfin, pour $n = 2^k - 2$ et $k \geqq 2$, on a:

$$x(2^{k-2}(n+1)) = 2^k n + 2^k - s_2(n+1) = 2^k n + 2^k - k,$$

d'où:

$$u(2^k n + 2^k - k) = a.$$

Remarque: Soit k un entier supérieur ou égal à 2, la suite de von Neumann peut être généralisée à la base k de deux manières:

– Tout entier n qui peut s'écrire $n=\sum \varepsilon_j (k^{j+1}-1)/(k-1)$, où j varie de 0 à l'infini, et où ε_j est compris au sens large entre 0 et $k-1$, admet une seule telle représentation.

Si on pose $c(n)=a$ ou $c(n)=b$ suivant que n admet ou n' admet pas une telle représentation, alors:

* la suite $(c(n))_n$ vérifie:

$$c(0)\,c(1)\,c(2)\ldots = a^k b^{h(1)} a^k b^{h(2)}\ldots$$

où $h(j)=1+v_k(j)$, et $v_k(j)$ est l'exposant de la plus grande puissance de k qui divise j;

* la suite $(c(n))_n$ est point fixe de la substitution

$$a \to a^k b, \qquad b \to b;$$

* $c(n)$ vaut a si et seulement s'il existe un entier m tel que

$$m-s_k(m)=(k-1)\,n$$

(l'équation en m ci-dessus admet 0 ou k solutions);

* la suite $(c(n))$ n'est pas k-automatique.

– Tout entier n qui peut s'écrire $n=\sum \varepsilon_j (k^{j+1}-1)$, où j varie de 0 à l'infini, et ε_j est compris au sens large entre 0 et $k-1$, admet une seule telle représentation.

Si l'on pose $d(n)=a$ ou $d(n)=b$ suivant que n admet ou n'admet pas une telle représentation, alors:

* la suite $(d(n))_n$ vérifie

$$d(0)\,d(1)\ldots = ab^{r(1)}\,ab^{r(2)}\ldots$$

où $r(j)=(k-1)(1+v_k(j))-1$;

* la suite $(d(n))_n$ est point fixe de la substitution

$$a \to (ab^{k-2})^k b, \qquad b \to b;$$

* $d(n)$ vaut a si et seulement s'il existe un entier m tel que

$$m-s_k(m)=n;$$

* la suite $(d(n))_n$ n'est pas k-automatique.

II. PREMIÈRES APPLICATIONS DE LA MÉTHODE PRÉCÉDENTE

Le théorème 1 prouvé ci-dessus suggère de chercher si une suite de mots A_n qui vérifie une relation de récurrence donnant A_n en fonction de $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$ est nécessairement point fixe (ou image d'un point fixe) d'un morphisme. Un résultat partiel dans cette direction figure dans [8], mais nous n'avons pas de théorème général qui permette de répondre complètement à cette question. Nous allons néanmoins donner ici trois exemples qui redémontrent l'automaticité de suites classiques; un exemple nouveau sera donné au prochain paragraphe.

1. La suite de Thue-Morse

Une des définitions de la suite de Thue-Morse (*voir* par exemple [4]) est:

A est la limite de la suite de mots A_n sur l'alphabet $\{0, 1\}$ définie par:

$$A_0 = 0$$

$$A_{n+1} = A_n \bar{A}_n$$

(avec $\bar{0} = 1$ et $\bar{1} = 0$).

Si l'on appelle σ le morphisme $0 \to 01$, $1 \to 10$, et que l'on remarque qu'on a les relations

$$\text{si } x = 0 \text{ ou } 1, \qquad \sigma(\bar{x}) = \overline{\sigma(x)}$$

$$\sigma(A_0) = \sigma(0) = 01 = A_1,$$

une récurrence immédiate donne:

$$\forall n \geqq 0, \quad \sigma(A_n) = A_{n+1},$$

d'où, en faisant tendre n vers l'infini :

$$\sigma(A)=A,$$

ce qui redonne un résultat bien connu.

2. La suite de pliage de papier

Une des définitions de la suite binaire obtenue en pliant régulièrement du papier (*voir* [4] ou [6]) est :

A est la limite de la suite de mots A_n sur $(0, 1)$ définie par :

$$A_0=0$$
$$A_{n+1}=A_n\,0\,A_n^{\#}$$

où $A_n^{\#}$ représente le mot obtenu en lisant A_n à l'envers et en remplaçant les 0 par des 1 et les 1 par des 0.

On remarque d'abord que, quel que soit n positif ou nul :

$$A_{n+1}^{\#}=(A_n\,0\,A_n^{\#})^{\#}=A_n\,1\,A_n^{\#}$$

d'où :

$$A_{n+1}=A_n\,0\,A_n^{\#}=A_n\,0\,A_{n-1}\,1\,A_{n-1}^{\#}=\ldots=A_n\,0\,A_{n-1}\,1\,A_{n-2}\,1\ldots A_1\,1\,A_0\,11.$$

Définissons alors une suite de mots B_n par :

$$B_0=0$$
$$B_{n+1}=B_n\,1\,B_{n-1}\,1\,B_{n-2}\,1\ldots B_1\,1\,B_0\,1\,0.$$

Si l'on pose alors :

$$V_n=\begin{pmatrix}A_n\\B_n\end{pmatrix},$$

ce qui définit une suite de mots sur l'alphabet $\{a, b, c, d\}$ où :

$$a=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\qquad b=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\qquad c=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\qquad d=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},$$

on a :

$$V_{n+1}=V_n\,b\,V_{n-1}\,d\ldots V_0\,dc.$$

V_n converge donc vers un mot infini V.

Si l'on note σ le morphisme:

$$\begin{aligned} a &\to ab \\ b &\to cb \\ c &\to ad \\ d &\to cd \end{aligned}$$

on prouve facilement par récurrence sur n que:

$$\forall n \geqq 0, \quad V_{n+1} = \sigma(V_n)c,$$

d'où, en faisant tendre n vers l'infini:

$$V = \sigma(V).$$

On retrouve ainsi que la suite A de pliage régulier de papier est l'image d'un point fixe d'un morphisme uniforme de longueur 2.

3. La suite des déplacements des tours de Hanoi

Si dans le problème des tours de Hanoi (*voir* [1]) on appelle a, b, c le déplacement d'un disque de la première à la deuxième tige, de la deuxième à la troisième et de la troisième à la première, et $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ les mouvements inverses, alors le déplacement de n disques de la première à la deuxième tige si n est impair, ou à la troisième tige si n est pair, est décrit par le mot A_n de longueur $2^n - 1$ sur l'alphabet $\{a, b, c, \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\}$ avec:

$$\begin{aligned} A_0 &= \varnothing, \\ A_{2n+1} &= A_{2n}\, a\, g^2(A_{2n}) \\ A_{2n+2} &= A_{2n+1}\, \bar{c}\, g(A_{2n}) \end{aligned}$$

où g est l'application définie par

$$\begin{aligned} &g(a) = b, \qquad g(b) = c, \qquad g(c) = a, \\ &g(\bar{a}) = \bar{b}, \qquad g(\bar{b}) = \bar{c}, \qquad g(\bar{c}) = \bar{a}. \end{aligned}$$

Notons σ le morphisme défini par :

$$a \to a\bar{c}$$
$$b \to c\bar{b}$$
$$c \to b\bar{a}$$
$$\bar{a} \to ac$$
$$\bar{b} \to cb$$
$$\bar{c} \to ba.$$

On prouve facilement les relations:

$$\sigma . g = g^2 . \sigma$$
$$\sigma . g^2 = g . \sigma$$

puis, par récurrence sur n:

$$A_{2n+1} = \sigma(A_{2n})\, a$$
$$A_{2n+2} = \sigma(A_{2n+1})\, b,$$

d'où, en faisant tendre n vers l'infini:

$$A = \sigma(A).$$

Ceci implique en particulier que A est 2-automatique (comme déjà prouvé dans [1]).

III. DÉVELOPPEMENT EN FRACTION CONTINUE DES SÉRIES FORMELLES SUR UN CORPS FINI

Rappelons d'abord qu'on ne connaît pas de nombre réel algébrique sur les rationnels, de degré supérieur ou égal à 3 dont la suite des quotients partiels soit bornée.

En revanche, Baum et Sweet ont construit dans [2] une série formelle $\sum a_n X^{-n}$, cubique sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}(X)$ le corps des fractions rationnelles modulo 2, et dont la suite des quotients partiels est à valeurs dans un ensemble fini. Comme la suite (a_n) est 2-automatique, il est naturel de se demander si la suite des quotients partiels est aussi 2-automatique, ce qui a conduit Mendès France à énoncer la conjecture rappelée dans l'introduction.

Le problème est double: donner, dans le cas où la suite des quotients partiels d'une série algébrique est à valeurs dans un ensemble fini, un algorithme « raisonnable » permettant de les calculer; ensuite montrer que cet algorithme produit des suites automatiques. Un article récent de Mills et Robbins [7] répond en partie à la première question en donnant de nombreux exemples de séries algébriques dont la suite des quotients partiels ne prend qu'un nombre fini de valeurs et en donnant des algorithmes pour calculer ces valeurs. Nous nous proposons de répondre dans un cas particulier (non trivial) à la deuxième question:

THÉORÈME 3 : *Il existe une série formelle algébrique de degré* 4 *sur le corps* $\mathbb{Z}/3\,\mathbb{Z}(X)$ *dont le développement en fraction continue donne une suite de quotients partiels* 3-*automatique.*

Soit en effet α la série de Laurent de degré 4 à coefficients dans $\mathbb{Z}/3\,\mathbb{Z}$ qui vérifie

$$[1+(x^2+2\,x)\,\alpha^3]/[1+(2\,x+2)\,\alpha^3]^{-1}=1/(\alpha-x).$$

Si l'on note:

$$H_n=x^{(3^n-2)},\quad x+\varepsilon_n,\quad 2\,x+\varepsilon_n,\quad (2\,x)^{(3^n-2)},\quad 2\,x+\varepsilon_n,\quad x+\varepsilon_n$$

où $x^{(c)}$ représente la répétition de c termes égaux à x, et où ε_n vaut 2 si n est impair et 1 si n est pair, alors le développement en fraction continue de α est donné par (*voir* [7], p. 402):

$$\alpha=[x,\,2\,x+2,\,x+1,\,H_1,\,H_2,\,H_3,\,\ldots].$$

Posons respectivement:

$$\begin{aligned}
A_n&=(x,\,2\,x+2,\,x+1,\,H_1,\,H_2,\,\ldots,\,H_n)\\
B_n&=(x,\,x,\,2\,x,\,K_1,\,K_2,\,\ldots,\,K_n)\\
C_n&=(2\,x+2,\,x+2,\,2\,x+2,\,L_1,\,L_2,\,\ldots,\,L_n)\\
D_n&=(x+1,\,2\,x+2,\,x+2,\,M_1,\,M_2,\,\ldots,\,M_n)
\end{aligned}$$

où:

$$\begin{aligned}
K_n&=(x^{(3^n)},\,(2\,x)^{(3^n)})\\
L_n&=(x^{(3^n-1)},\,x+\varepsilon_{n+1},\,(2\,x)^{(3^n-1)},\,2\,x+\varepsilon_{n+1})\\
M_n&=(x^{(3^n-1)},\,2\,x+\varepsilon_{n+1},\,(2\,x)^{(3^n-1)},\,x+\varepsilon_{n+1}).
\end{aligned}$$

Les mots A_n, B_n, C_n, D_n, H_n, K_n, L_n, M_n sont des mots sur l'alphabet $\Gamma=\{x,\,2\,x,\,x+1,\,2\,x+1,\,x+2,\,2\,x+2\}$.

Notons alors V_n le mot défini sur l'alphabet Γ^4 par:

$$V_n = \begin{pmatrix} A_n \\ B_n \\ C_n \\ D_n \end{pmatrix},$$

notons enfin Γ' le sous-alphabet de Γ de cardinal 13 défini par:

$$\Gamma' = \{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M\}$$

où l'on a posé:

$$A = \begin{pmatrix} x \\ x \\ 2x+2 \\ x+1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2x+2 \\ x \\ x+2 \\ 2x+2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} x+1 \\ 2x \\ 2x+2 \\ x+2 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \\ x \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} x+2 \\ x \\ x \\ x \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 2x+2 \\ x \\ x+1 \\ 2x+1 \end{pmatrix},$$

$$G = \begin{pmatrix} 2x \\ 2x \\ 2x \\ 2x \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 2x+2 \\ 2x \\ 2x \\ 2x \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} x+2 \\ 2x \\ 2x+1 \\ x+1 \end{pmatrix},$$

$$J = \begin{pmatrix} x+1 \\ x \\ x \\ x \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 2x+1 \\ x \\ x+2 \\ 2x+2 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 2x+1 \\ 2x \\ 2x \\ 2x \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} x+1 \\ 2x \\ 2x+2 \\ x+2 \end{pmatrix}.$$

Soit enfin σ le morphisme uniforme de longueur 3 défini sur Γ' par:

$$A \to ABC$$
$$B \to DEF$$
$$C \to GHI$$
$$D \to DDD$$
$$E \to DDD$$

$$F \to DJK$$
$$G \to GGG$$
$$H \to GGG$$
$$I \to GLM$$
$$J \to DDD$$
$$K \to DEF$$
$$L \to GGG$$
$$M \to GHI.$$

On vérifie alors, en posant $W_0 = ABC$, $U_n = \begin{pmatrix} H_n \\ K_n \\ L_n \\ M_n \end{pmatrix}$, $V_n = W_0 U_1, \ldots, U_n$,

que V_n est un mot sur Γ' et que:

$$U_{2n} = D^{(3^{2n}-2)} JKG^{(3^{2n}-2)} LM$$
$$U_{2n+1} = D^{(3^{2n+1}-2)} EFG^{(3^{2n+1}-2)} HI,$$

d'où, par récurrence sur n:

$$\sigma(U_{2n}) = U_{2n+1}$$
$$\sigma(U_{2n+1}) = U_{2n+2}.$$

Finalement on a, quel que soit l'entier n:

$$\sigma(U_n) = U_{n+1}.$$

On en déduit facilement, pour tout entier n:

$$\sigma(V_n) = V_{n+1},$$

d'où à la limite:

$$\sigma(V) = V.$$

Ainsi la suite des quotients partiels de α est image d'un point fixe d'une 3-substitution, donc est 3-automatique.

BIBLIOGRAPHIE

1. J.-P. ALLOUCHE et F. DRESS, *Tours de Hanoi et automates finis*, à paraître dans Informatique théorique et aplications..
2. L. BAUM et M. SWEET, *Continued fractions of algebraic power series in characteristic* 2, Ann. Math., vol. 103, 1976, p. 539-610.
3. N. BOURBAKI, *Théorie des ensembles*, chap. 3, p. 39, Hermann, 1963.
4. G. CHRISTOL, T. KAMAE, M. MENDÈS FRANCE et G. RAUZY, *Suites algébriques, automates, et substitutions*, Bull. Soc. Math. France, vol. 108, 1980, p. 401-419.
5. A. COBHAM, *Uniform tag sequences*, Mathem. Syst. Theory, vol. 6, 1972, p. 164-192.
6. C. DAVIS et D. E. KNUTH, *Number representations and dragon curves*, J. Recreational Math., vol. 3, 1970, p. 61-81 et 133-149.
7. W. H. MILLS et D. P. ROBBINS, *Continued fractions for certain algebraic power series*, J. Numb. Theory, vol. 23, n° 3, 1986, p. 388-404.
8. G. ROZENBERG et A. LINDENMAYER, *Developmental systems with locally catenative formulas*, Acta Informatica, vol. 2, 1973, p. 214-248.

Note ajoutée le 26 *mai* 1989: De nouveaux résultats sur la question posée au début du paragraphe II ont été donnés par le troisième auteur (A generalization of automatic sequences, Theoretical Computer Science, 61, 1988, 1-16). Par ailleurs d'autres réponses à la question des Mendès France (voir paragraphe III) ont été données par le premier auteur (sur le développement en fraction continue de certaines séries formelles, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 307, Série I, p. 631-633, 1988).