

DENIS THÉRIEN

## **Catégories et langages de dot-depth un**

*Informatique théorique et applications*, tome 22, n° 4 (1988), p. 437-445.

[http://www.numdam.org/item?id=ITA\\_1988\\_\\_22\\_4\\_437\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ITA_1988__22_4_437_0)

© AFCET, 1988, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Informatique théorique et applications » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques*

<http://www.numdam.org/>

## CATEGORIES ET LANGAGES DE DOT-DEPTH UN (\*)

par Denis THÉRIEN <sup>(1)</sup>

Communiqué par J. E. PIN

---

Résumé. – *Plusieurs résultats récents ont démontré l'avantage d'utiliser les catégories, plutôt que les monoïdes, comme modèle algébrique des automates finis. Cette généralisation joue un rôle crucial dans de nombreux théorèmes sur les décompositions de machines. Nous allons ici donner une nouvelle preuve d'un important théorème de Robert Knast sur les langages de dot-depth un: notre démonstration sera de nature algébrique et utilisera à fond le formalisme catégorique.*

Abstract. – *Several recent results have shown the advantage of using categories, rather than monoids, as the algebraic model of finite state automata. This generalization plays a crucial role in many theorems on decomposition of machines. We will give here a new proof of an important theorem of Robert Knast on dot-depth one languages: our proof will be algebraic and will make full use of the categorial formalism.*

### 0. INTRODUCTION

La théorie des variétés d'Eilenberg et Schützenberger [2] permet de décrire les liens profonds entre la combinatoire des langages rationnels et les propriétés algébriques des monoïdes finis. A l'intérieur de ce cadre, Robert Knast a démontré un important théorème [3] caractérisant algébriquement les langages de dot-depth un, c'est-à-dire les fonctions booléennes de langages de la forme  $w_0 A^* w_1 \dots w_{n-1} A^* w_n$  où  $A^*$  est le monoïde libre engendré par  $A$ , et  $w_0, \dots, w_n$  sont des mots de  $A^*$ . Le lemme central de sa preuve utilise la notion de congruence sur un graphe et démontre l'égalité de deux familles spécifiques de congruences par un délicat argument combinatoire. On a réalisé depuis que les congruences sur les graphes, c'est-à-dire les catégories, jouent

---

(\*) Reçu en septembre 1986, révisé en juillet 1987.

This research was funded by the National Science and Engineering Research Council of Canada.

(<sup>1</sup>) School of Computer Science, McGill University, Montreal, Québec, Canada H3A 2K6.

un rôle central dans l'étude des décompositions d'automates et les relations langages-monoïdes [4, 7, 8]. En fait, en remplaçant les monoïdes par les catégories on peut développer essentiellement la même théorie qu'auparavant [6, 9], la notion de langages devenant alors celle de sous-ensemble des flèches d'une catégorie libre. Entre autres, on peut étudier les catégories avec les mêmes outils qu'on utilisait pour les monoïdes.

Dans cet article nous allons donner une preuve algébrique, beaucoup plus simple que l'originale, du théorème de Knast sur les catégories en raisonnant sur la structure des  $J$ -classes. Nous allons d'abord introduire quelques notions algébriques générales, puis étudier plus spécifiquement la famille des catégories finies satisfaisant l'équation

$$(st)^{\omega} su (vu)^{\omega} = (st)^{\omega} (vu)^{\omega} \quad (0.1)$$

où  $x^{\omega}$  dénote l'unique idempotent qui soit une puissance de  $x$ . Nous allons ensuite démontrer quelques propriétés combinatoires des langages testables par morceaux. Nous allons finalement prouver le résultat principal de Knast : les langages reconnus par une catégorie  $C$  sont testables par morceaux ssi  $C$  satisfait l'équation (0.1). Le raisonnement suivi sera l'adaptation aux catégories de celui utilisé dans [5] pour obtenir une preuve algébrique d'un théorème de Simon sur les monoïdes  $J$ -triviaux.

## 1. ÉLÉMENTS DE LA THÉORIE ALGÈBRE DES CATÉGORIES

Dans cette section on introduira la notation utilisée et on démontrera les résultats algébriques sur les catégories dont nous aurons besoin par la suite. Une catégorie  $C$  sur un ensemble d'objets  $N$  est donnée par l'union d'une famille d'ensembles disjoints  $\{C_{ij} \mid i, j \in N\}$  et par une opération qui à toute paire d'éléments  $s \in C_{ij}$ ,  $t \in C_{jk}$  associe un élément  $st = u$  de  $C_{ik}$ . Cette opération est associative, i.e. pour tout  $i, j, k, l \in N$ ,  $s \in C_{ij}$ ,  $t \in C_{jk}$ ,  $u \in C_{kl}$  on a  $(st)u = s(tu)$ , et elle admet des identités, i.e. pour tout  $j \in N$ , il existe un élément  $1_j \in C_{jj}$  tel que pour tout  $s \in C_{ij}$ ,  $t \in C_{jk}$ , on ait  $s1_j = s$  et  $1_j t = t$ . On appellera  $C_{ij}$  l'ensemble des flèches allant de  $i$  à  $j$ .  $N$  sera toujours fini et une catégorie  $C$  est dite finie si  $|C_{ij}| < \infty$  pour tout  $i, j$ . Si  $D$  est un sous-ensemble quelconque de  $C$  on notera  $D_{ij} = D \cap C_{ij}$ . On définit le produit  $F$  de deux sous-ensembles  $D, E$  de  $C$  par  $F_{ij} = \bigcup_k D_{ik} E_{kj}$ . Notons que  $C$  est un monoïde ssi  $|N| = 1$ . Une équivalence  $\gamma$  sur  $C$  est une congruence si pour tout  $s \in C_{ij}$   $[s]_{\gamma} \subseteq C_{ij}$  et  $[s]_{\gamma} [t]_{\gamma} \subseteq [st]_{\gamma}$ . La congruence la plus grossière sera notée  $\sim$ , et on a  $s \sim t$  ssi  $s, t \in C_{ij}$ . Soit  $(N, A)$  un multigraphe dirigé fini avec  $N$  l'ensemble des nœuds et  $A$  l'ensemble des arêtes. On note  $A_{ij}^*$  l'ensemble des

chemins de longueur finie allant de  $i$  à  $j$ , incluant si  $i=j$  un chemin vide  $1_i$ . L'opération de concaténation des chemins donne une catégorie  $A^* = \bigcup_{i, j \in N} A_{ij}^*$ , la catégorie libre engendrée par  $A$ .  $A^*$  est un monoïde libre

ssi  $|N|=1$ . Soit  $C$  une catégorie finie sur les objets  $N$ , et  $A$  un ensemble de générateurs de  $C$ , i.e.  $A \subseteq C$  et pour tout  $s \in C$  on a  $s = 1_i$  ou il existe  $a_1, \dots, a_n \in A$  tel que  $s = a_1 \dots a_n$ . On considère le multigraphe dirigé  $(N, A)$  et la catégorie libre  $A^*$  qu'il induit. On peut retrouver  $C$  en prenant le quotient de  $A^*$  par la congruence  $\gamma$ , définie par  $x\gamma y$  ssi l'évaluation dans  $C$  des produits  $x$  et  $y$  coïncident. Cette représentation de  $C$  par une congruence sur une catégorie libre n'est pas unique puisqu'elle dépend du choix des générateurs  $A$ .

Soit  $A^*$  une catégorie libre. Un langage est un sous-ensemble de  $A^*$ . Si  $\gamma$  est une congruence sur  $A^*$ , on dira que  $L \subseteq A^*$  est un  $\gamma$ -langage lorsque  $L$  est union de  $\gamma$ -classes. Pour un langage quelconque  $L$  on définit la congruence syntaxique  $\gamma_L$  par  $x\gamma_L y$  ssi  $x, y \in C_{jk}$  et pour tout  $u \in A_{ij}^*, v \in A_{ki}^*$ , on a  $uxv \in L_{ii}$  ssi  $uyv \in L_{ii}$ . Il s'avère que  $L$  est un  $\gamma$ -langage ssi  $\gamma \subseteq \gamma_L$  et donc  $\gamma_L$  est la congruence la plus grossière qui sature  $L$ .

Un sous-ensemble non-vide  $I$  de  $C$  est un idéal si  $CIC = I$ . On définit la relation d'équivalence  $J$  sur  $C$  par  $sJt$  ssi  $CsC = CtC$ . On écrit  $s \leq_J t$  si  $CsC \subseteq CtC$  et  $s <_J t$  si  $CsC \not\subseteq CtC$ . On vérifie que  $I$  est un idéal ssi  $s \leq_J t$  et  $t \in I$  entraînent  $s \in I$ .  $I$  est un idéal minimal s'il ne contient proprement aucun idéal de  $C$ : un idéal minimal est toujours constitué d'une seule  $J$ -classe de  $C$ . Contrairement au cas des monoïdes, l'idéal minimal d'une catégorie n'est pas en général unique: cela dépend de la structure du multigraphe sous-jacent.  $C$  est fortement connexe si  $C_{ij} \neq \emptyset$  pour tout  $i, j$ . Les composantes fortement connexes de  $C$  sont les sous-catégories maximales satisfaisant à cette condition. Si  $C = A^*/\gamma$  et  $C_1, \dots, C_r$  sont les composantes fortement connexes de  $C$ , alors on a que  $C_k = A_k^*/\gamma_k$  est une catégorie sur  $N_k$ , avec  $A_k = A \cap C_k$  et  $\gamma_k$  la restriction de  $\gamma$  à  $A_k^*: N$  est l'union disjointe des  $N_k$ . Un chemin de  $A^*$  se factorise de façon unique en  $x = x_0 a_1 x_1 \dots a_p x_p$  où  $x_j \in A_{k_j}^*$  et  $a_j \in A - \bigcup A_k$ : on dira que c'est la factorisation canonique de  $x$ . Notons qu'un chemin  $x$  ne peut traverser qu'une seule fois une arête  $a \in A - \bigcup A_k$ , et que l'ensemble  $\{a_1, \dots, a_p\}$  d'arêtes de  $A - \bigcup A_k$  traversées par  $x$  déterminent uniquement les composantes fortement connexes visitées par  $x$  et l'ordre dans lequel elles le sont.

LEMME 1.1 : Si  $C$  est fortement connexe alors  $C$  possède un unique idéal minimal  $I$  et  $I_{ij} \neq \emptyset$  pour tout  $i, j$ .

■ Soit  $s, t \in C$ . On peut toujours trouver  $u$  tel que le produit  $sut$  existe. Comme  $sut \leq_J s$  et  $sut \leq_J t$ , il existe une unique  $J$ -classe minimale  $I$  et donc un unique idéal minimal. De plus si  $u \in I_{ki}$  on peut trouver  $s \in C_{ik}$  et  $t \in C_{ij}$  et on aura  $sut \in I_{ij}$ . ■

Une catégorie  $C$  est dite triviale si  $|C_{ij}| \leq 1$  pour tout  $i, j$ . On a alors  $C = A^*/\sim$  pour n'importe quel ensemble  $A$  de générateurs. On dira que  $C$  possède un zéro s'il existe un idéal minimal unique et que cet idéal est une catégorie triviale. Un idéal 0-minimal est un idéal  $I'$  contenant proprement  $I$  mais aucun autre idéal de  $C$ :  $I'$  est alors de la forme  $J \cup I$  où  $J$  est une  $J$ -classe.

LEMME 1.2 : Soit  $C = A^*/\gamma$  avec un unique idéal minimal  $I$  qui est trivial. Alors  $\gamma \supseteq \gamma_1 \cap \dots \cap \gamma_n$  où  $\gamma_i \supseteq \gamma$  et  $A^*/\gamma_i$  possède un unique idéal 0-minimal.

■ Soit  $C - I = \{[x_1]_{\gamma}, \dots, [x_n]_{\gamma}\}$ . On pose  $L_i = [x_i]_{\gamma}$  et  $\gamma_i = \gamma_{L_i}$ . Supposons que  $\gamma_i y$  pour  $i = 1, \dots, n$ . Si  $x \notin I$  on a  $x \gamma x_k$  pour un certain  $k$ . Puisque  $x \gamma_k y$  on a  $uxv \gamma x_k$  ssi  $uyv \gamma x_k$ : prenant  $u = 1_i, v = 1_j$  on a donc  $y \gamma x_k$ , et  $x \gamma y$ . De même si  $y \notin I$  alors  $x \gamma y$ . Si  $x \in I$  alors  $y \in I$  et  $x \gamma_1 \cap \dots \cap \gamma_n y$  entraîne  $x \sim y$  et donc  $x \gamma y$  puisque  $I$  est trivial. Il est clair que  $\gamma_i \supseteq \gamma$ : cela implique que  $A^*/\gamma_i$  a un idéal minimal trivial noté  $I_i$ . Il reste à montrer que  $A^*/\gamma_i$  a un unique idéal 0-minimal.  $L_i$  est constitué d'une seule  $\gamma_i$ -classe et cette classe ne peut être dans l'idéal minimal de  $A^*/\gamma_i$ . De plus pour tout  $y \in A^*$ ,  $[y]_{\gamma_i}$  n'est pas dans l'idéal minimal de  $A^*/\gamma_i$  ssi  $[x_i]_{\gamma} \leq_J [y]_{\gamma}$ . Soit  $J$  la  $J$ -classe de  $[x_i]_{\gamma_i}$ : alors  $J \cup I_i$  est un idéal 0-minimal, qui est unique puisque toutes les autres  $J$ -classes sont au-dessus de  $J$ . ■

On aura besoin d'une nouvelle relation d'équivalence sur  $C$ . On notera  $sKt$  ssi  $s = s_1 \dots s_n, t = t_1 \dots t_n$  avec  $s_i J t_i$ . Donc  $sKt$  ssi il existe des  $J$ -classes  $J_1, \dots, J_n$  telles que  $s, t \in J_1 \dots J_n$ . Une  $J$ -classe  $J$  est triviale si  $|J_{ij}| \leq 1$ . Une catégorie est  $J$ -triviale si chaque  $J$ -classe est triviale. Les mêmes définitions peuvent être données pour la relation  $K$ . Knast a montré qu'une catégorie est  $J$ -triviale ssi elle satisfait  $(st)^{\circ} s = (st)^{\circ} = t(st)^{\circ}$  pour tout  $s, t \in C_{ii}$ , pour tout  $i \in N$ . De plus  $C$  est  $K$ -triviale ssi l'équation (0.1) est satisfaite pour tout  $s, v \in C_{ij}, t, u \in C_{ji}$ , pour tout  $i, j \in N$ . On utilisera le résultat suivant.

LEMME 1.3 : Une catégorie  $C$  est  $K$ -triviale ssi elle est  $J$ -triviale et pour toute paire de  $J$ -classes  $J_1, J_2$ , on a  $J_1 J_2 \subseteq J$  pour une certaine  $J$ -classe  $J$ .

■ Supposons  $C$   $K$ -triviale. Alors puisque  $sKt$  entraîne  $sJt$ ,  $C$  est également  $J$ -triviale. Supposons  $x_1 J y_1, x_2 J y_2$  et que les deux produits  $x_1 x_2, y_1 y_2$  soient définis.

On a

$$x_1 = u_1 y_1 v_1, \quad y_1 = s_1 x_1 t_1, \quad x_2 = u_2 y_2 v_2, \quad y_2 = s_2 x_2 t_2.$$

Donc

$$x_1 x_2 = (u_1 s_1)^n x_1 (t_1 v_1)^n (u_2 s_2)^n x_2 (t_2 v_2)^n$$

et

$$y_1 y_2 = (s_1 u_1)^n y_1 (v_1 t_1)^n (s_2 u_2)^n (s_2 u_2)^n y_2 (v_2 t_2)^n \quad \text{pour tout } n.$$

Posant  $n = \omega$  et utilisant le fait que  $C$  est  $K$ -triviale, on déduit de l'équation (0.1)

$$x_1 x_2 = (u_1 s_1)^\omega x_1 (t_1 v_1)^\omega t_1 s_2 (u_2 s_2)^\omega x_2 (t_2 v_2)^\omega,$$

et il en découle  $s_1 x_1 x_2 t_2 = y_1 y_2$ . De même

$$u_1 y_1 y_2 v_2 = x_1 x_2 \quad \text{et} \quad x_1 x_2 J y_1 y_2.$$

Supposons maintenant que  $C$  est  $J$ -triviale et satisfait la condition sur le produit des  $J$ -classes. Si

$$x \sim y, \quad x = x_1 \dots x_r, \quad y = y_1 \dots y_r, \quad \text{avec } x_i J y_i$$

alors  $x J y$  et par  $J$ -trivialité on a  $x = y$ .  $C$  est donc  $K$ -triviale. ■

## 2. LANGAGES TESTABLES PAR MORCEAUX

Soit  $A^*$  une catégorie libre sur un ensemble d'objets  $N$ . Un langage  $L \subseteq A^*$  est testable par morceaux s'il appartient à l'algèbre booléenne engendrée par les langages de la forme  $(A^* a_1 A^* \dots a_m A^*)_{ij}$  avec  $m \geq 0$  et  $a_1, \dots, a_m \in A$ . En terme du multigraphe  $(N, A)$ , cela signifie qu'on peut déterminer l'appartenance d'un chemin  $x$  à  $L$  en considérant les  $m$ -uplets d'arêtes qui sont empruntés (consécutivement ou non) par  $x$ . Le problème à résoudre est de caractériser effectivement les catégories  $C = A^*/\gamma$  telles que les  $\gamma$ -langages soient testables par morceaux.

On peut poser la question en terme de congruences. Soit  $m \geq 0$ : on définit pour  $x \in A^*$   $x \alpha_m = \{ (a_1, \dots, a_r) \mid 1 \leq r \leq m, a_k \in A \text{ et } x = x_0 a_1 x_1 \dots a_r x_r \}$ : donc  $x \alpha_0 = \emptyset$  pour tout  $x$ . On écrira  $x \leq_m y$  si  $x \alpha_m \supseteq y \alpha_m$ : cette relation est évidemment réflexive et transitive. On pose  $x \alpha_m y$  si  $x \sim y$  et  $x \alpha_m = y \alpha_m$ . On vérifie aisément que cette relation est une congruence d'index fini. On a que  $L$  est testable par morceaux ssi  $L$  est un  $\alpha_m$ -langage pour un certain  $m \geq 0$ , et

que  $C = A^*/\gamma$  ne reconnaît que des langages par morceaux ssi  $\gamma \supseteq \alpha_m$ . Soit  $V$  la famille des catégories  $C = A^*/\gamma$  avec  $\gamma \supseteq \alpha_m$  pour un certain  $m$ .

LEMME 2.1 :  $C \in V$  ssi chaque composante fortement connexe de  $C$  appartient à  $V$ .

■ Soit  $C_k = A_k^*/\gamma_k$  les composantes fortement connexes de  $C$ . Supposons que  $\gamma_k \supseteq \alpha_{m_k}$  pour  $k = 1, \dots, n$ , et soit  $m = \max \{1, m_k \mid 1 \leq k \leq n\}$ . Soit  $x \alpha_m y$ , et considérons les factorisations canoniques  $x = x_0 a_1 x_1 \dots a_r x_r$  et  $y = y_0 b_1 y_1 \dots b_s y_s$ . Puisque  $m \geq 1$ , on a  $r = s$  et  $a_1 = b_1, \dots, a_r = b_r$ . Puisque  $k \neq l$  entraîne  $A_k \cap A_l = \emptyset$ , on a  $x \alpha_m y$  ssi  $x_i \alpha_{m_i} y_i$  pour  $i = 0, \dots, r$ . Comme  $m \geq m_i$  et  $\gamma_i \supseteq \alpha_{m_i}$ , on a  $x_i \gamma_i y_i$  pour tout  $i$  et donc  $x \gamma y$ . La nécessité de la condition est évidente. ■

Nous allons maintenant montrer deux résultats combinatoires sur les congruences  $\alpha_m$ . Pour alléger la notation, on écrira  $\underline{x}$  pour  $[x]_{\alpha_m}$ .

LEMME 2.2 :  $x \alpha_m = y \alpha_m$  ssi  $\underline{x} J \underline{y}$ .

■ Si  $\underline{x} \leq_J \underline{y}$ , il existe  $u, v$  tel que  $\underline{x} = uvv$ . Ceci implique que  $x \alpha_m \supseteq y \alpha_m$ . On a donc que  $\underline{x} J \underline{y}$  entraîne  $x \alpha_m = y \alpha_m$ . Soit maintenant  $x, y$  avec  $x \alpha_m = y \alpha_m$ . Supposons  $x \in A_{ij}^*$  et  $y \in A_{ki}^*$ . On considère la factorisation  $y = y_0 y_1$  où  $y_0$  est le plus court préfixe de  $y$  qui appartienne à  $A_{ki}^*$ . On va montrer  $(y_0 x) \alpha_m = y \alpha_m$ . Il est clair que  $y \alpha_m \subseteq (y_0 x) \alpha_m$ . Soit  $u \in (y_0 x) \alpha_m$ : si  $u \in x \alpha_m$  alors  $u \in y \alpha_m$ . Sinon  $u = u_0 u_1$  avec  $u_0 \in y_0 \alpha_r$  et  $u_1 \in x \alpha_{m-r}$ , pour un certain  $r$  entre 1 et  $m$ . Si  $|u_1| = 0$  alors  $u \in y_0 \alpha_m \subseteq y \alpha_m$ . Si la première arête  $a$  de  $u_1$  est la première arête de  $x$ , alors le choix de la factorisation de  $y$  force  $u_1$  à appartenir à  $y_1 \alpha_{m-r}$  et donc  $u \in y \alpha_m$ . Sinon on a que  $au_1 \in x \alpha_m = y \alpha_m$ : encore une fois on déduit  $u_1 \in y_1 \alpha_m$  et donc  $u \in y \alpha_m$ . Par symétrie, considérant  $y = y_0 y_1$  avec  $y_1$  le plus court suffixe de  $y$  dans  $A_{ji}^*$ , on montre  $(x y_1) \alpha_m = y \alpha_m$ . On tire que  $y \alpha_m y_0 x y_1$  et que  $\underline{y} \leq_J \underline{x}$ . De même  $\underline{x} \leq_J \underline{y}$  et le résultat est démontré. ■

Une 2-factorisation de  $x$  est donnée par  $x = x_0 e x_1$  où  $e \in A$  ou  $|e| = 0$ . On étend le préordre  $\leq_m$  défini plus haut aux 2-factorisations en posant  $(x_0, e, x_1) \leq_m^2 (y_0, f, y_1)$  ssi  $x_0 \leq_m y_0, x_1 \leq_m y_1$  et  $f = e$  ou  $|f| = 0$ . On définit alors  $x \leq_m^2 y$  ssi pour toute 2-factorisation  $(x_0, e, x_1)$  de  $x$ , il existe une 2-factorisation  $(y_0, f, y_1)$  de  $y$  telle que  $(x_0, e, x_1) \leq_m^2 (y_0, f, y_1)$ .

LEMME 2.3 :  $x \leq_m^2 y$  et  $y \leq_m^2 x$  ssi  $x \alpha_{2m} = y \alpha_{2m}$ .

■ Soit  $x$  et  $y$  avec  $x \alpha_{2m} = y \alpha_{2m}$ . Considérons une 2-factorisation  $(x_0, e, x_1)$  de  $x$ . Soit  $y_0$  le plus long préfixe de  $y$  avec  $x_0 \leq_m y_0$ . Si  $y_0 = y$  alors  $(x_0, e, x_1) \leq_m^2 (y_0, 1, 1)$  puisque  $x_1 \leq_m 1$ . Sinon  $y = y_0 a y_1$  et il existe  $w \in y_0 \alpha_{m-1}$  tel que  $wa \notin x_0 \alpha_m$ . Si  $e = a$ , pour tout  $v \in y_1 \alpha_m$  on a  $wav \in y \alpha_{2m} = x \alpha_{2m}$ , ce qui entraîne  $v \in x_1 \alpha_m$ . Si  $e \neq a$ , pour tout  $v \in y_1 \alpha_m$  on a

encore  $v \in x_1 \alpha_m$ ; si  $v \in (ay_1) \alpha_m - y_1 \alpha_m$ , alors  $wv \in x \alpha_{2m-1}$  et  $v \in x_1 \alpha_m$ . On déduit  $(x_0, e, x_1) \leq_m^2 (y_0, 1_j, ay_1)$ . On a donc bien  $x \leq_m^2 y$ , et par symétrie  $y \leq_m^2 x$ . Supposons maintenant  $x \leq_m^2 y$  et  $y \leq_m^2 x$ . Soit  $w \in x \alpha_{2m}$ . Si  $|w| \leq m$  on a  $w \in y \alpha_m \subseteq y \alpha_{2m}$ . On considère sinon la factorisation  $w = w_0 a w_1$  avec  $|w_0| = m - 1$ . On factorise  $x$  en  $x_0 a x_1$  avec  $|x_0|$  minimal tel que  $w_0 \in x_0 \alpha_{m-1}$ . Comme  $w_0 a \in y \alpha_m$ , on peut choisir une factorisation  $y = y_0 a y_1$  avec  $|y_0|$  minimal tel que  $w_0 \in y_0 \alpha_{m-1}$ . Pour cette 2-factorisation  $(y_0, a, y_1)$  de  $y$  on sait qu'il existe une 2-factorisation  $(x'_0, f, x'_1)$  de  $x$  avec  $(y_0, a, y_1) \leq_m^2 (x'_0, f, x'_1)$ . Supposons  $f = a$ : si  $|x'_0| \leq |x_0|$ , alors  $w_1 \in x'_1 \alpha_m \subseteq y_1 \alpha_m$ , et donc  $w \in y \alpha_{2m}$ . Si  $|x'_0| > |x_0|$  alors  $w_0 a \in x'_0 \alpha_m \subseteq y_0 \alpha_m$ , contredisant la minimalité de  $|y_0|$ . Supposons  $|f| = 0$ : si  $|x'_0| \leq |x_0 a|$  alors  $w_1 \in x'_1 \alpha_m \subseteq y_1 \alpha_m$  et  $w \in y \alpha_{2m}$ . Si  $|x'_0| > |x_0 a|$  alors  $w_0 a \in x'_0 \alpha_m \subseteq y_0 \alpha_m$ , contredisant la minimalité de  $|y_0|$ . ■

### 3. LE THÉORÈME DE KNAST

Nous avons maintenant les outils nécessaires pour démontrer le résultat de Knast. Soit  $K$  la famille des catégories finies, satisfaisant l'équation (0. 1).

LEMME 3. 1 : Soit  $C \in K$ ,  $J$  une  $J$ -classe de  $C$  contenant un idempotent  $e$ . Alors  $\{x \in C | e \leq_J x\}$  forme une sous-catégorie de  $C$ .

■ Il suffit de montrer que l'ensemble est fermé sous la multiplication de  $C$ . Soit  $x, y$  tel que  $e \leq_J x, e \leq_J y$ , i. e.  $e = sxt, e = uyv$ , et supposons que le produit  $xy$  existe. Alors  $e = e^2 \omega = (sxt)^\omega (uyv)^\omega = (sxt)^\omega sxyv (uyv)^\omega$  puisque  $C \in K$ . Donc  $e \leq_J xy$ . ■

THÉORÈME 3. 2 :  $C \in K$  ssi  $C = A^*/\gamma$  avec  $\gamma \supseteq \alpha_m$  pour un certain  $m \geq 0$ .

■ La nécessité de l'appartenance à  $K$  est immédiate du fait que  $A^*/\alpha_m$  satisfait à l'équation. Soit maintenant  $C = A^*/\gamma$  vérifiant l'équation (0. 1): on a à montrer l'existence d'un  $m \geq 0$  tel que  $\gamma \supseteq \alpha_m$ . D'après le lemme 2. 1 on peut supposer que  $C$  est fortement connexe et donc possède un unique idéal minimal. Il est facilement vérifié que cet idéal doit être trivial. Si  $C$  est une catégorie triviale alors  $\gamma = \alpha_0 = \sim$ . Sinon on peut, par le lemme 1. 2, supposer que  $C$  possède un unique idéal 0-minimal qui est l'union d'une  $J$ -classe  $J$  et de l'idéal minimal  $I$ . Si  $J$  contient un élément idempotent alors  $C - I$  est une sous-catégorie propre de  $C$  par le lemme 3. 1. Cette sous-catégorie est de la forme  $B^*/\beta$  avec  $B \subseteq A$  et on peut supposer par récurrence que  $\beta \supseteq \alpha'_m$ .

Posons  $m = \max \{1, m'\}$ : considérons  $x, y \in A^*$  avec  $x \alpha_m y$ . On a  $x \in B^*$  ssi  $y \in B^*$ ; si  $x$  et  $y$  appartiennent à  $B^*$ , comme  $\alpha_m \subseteq \alpha'_m$ , on déduit  $x \gamma y$ . Sinon on a que  $[x]_\gamma$  et  $[y]_\gamma$  sont tous deux dans  $I$ : comme l'idéal minimal est



trivial et que  $x$  et  $y$  sont coterminaux, il suit que  $x \gamma y$ . Il reste maintenant le cas où la  $J$ -classe  $J$  ne contient pas d'idempotent. Exactement comme dans le cas des monoïdes on peut alors montrer que  $JJ \cap J = \emptyset$  et donc que  $JJ \subseteq I$ . On considère la catégorie  $D = A^*/\delta$  obtenue en posant  $x \delta y$  ssi  $x \sim y$  et  $x \gamma y$  ou  $[x]_\gamma, [y]_\gamma \in J \cup I$ ; c'est le quotient de Rees classique. On a  $\delta \not\equiv \gamma$  et on peut supposer inductivement que  $\delta \equiv \alpha_m$ . On va montrer que  $\gamma \equiv \alpha_{2m}$ . Soit  $x \alpha_{2m} y$  : comme  $\alpha_{2m} \subseteq \alpha_m \subseteq \delta$ , on a  $[x]_\gamma, [y]_\gamma \in J \cup I$  ssi  $[y]_\gamma \in J \cup I$ . Si  $[x]_\gamma, [y]_\gamma \notin J \cup I$ , on a que  $x \delta y$  implique  $[x]_\gamma = [y]_\gamma$  puisque  $\delta$  et  $\gamma$  coïncident sur le complément de l'idéal 0-minimal. Supposons donc  $[x]_\gamma$  et  $[y]_\gamma$  dans  $J \cup I$ .

*Cas 1* :  $x$  admet une factorisation  $x = x_0 x_1$  avec  $[x_0]_\gamma, [x_1]_\gamma \notin J \cup I$ . Considérons l'ensemble des 2-factorisations de  $x$  qui sont au-dessus de  $(x_0, 1_k, x_1)$  dans l'ordre  $\leq_m^2$ . Choisissons parmi cet ensemble une 2-factorisation maximale  $(x'_0, f, x'_1)$ , i. e.  $(x_0, 1_k, x_1) \leq_m^2 (x'_0, f, x'_1)$  et pour toute autre 2-factorisation  $(x''_0, e, x''_1)$  tel que  $(x'_0, f, x'_1) \leq_m^2 (x''_0, e, x''_1)$  on a  $(x''_0, e, x''_1) \leq_m^2 (x'_0, f, x'_1)$ . Par le lemme 2.3, on a que  $x \alpha_{2m} y$  implique  $x \leq_m^2 y$ . Donc, il existe une 2-factorisation  $(y_0, g, y_1)$  de  $y$  avec  $(x'_0, f, x'_1) \leq_m^2 (y_0, g, y_1)$ . On a aussi une 2-factorisation  $(x'_0, e, x'_1)$  de  $x$  avec  $(y_0, g, y_1) \leq_m^2 (x'_0, e, x'_1)$ . On a donc  $x'_0 \leq_m y_0 \leq_m x'_0$  et  $x'_1 \leq_m y_1 \leq_m x'_1$ . Le choix de  $x'_0$  et  $x'_1$  implique que  $x'_0 \alpha_m = y_0 \alpha_m$  et  $x'_1 \alpha_m = y_1 \alpha_m$ . Du lemme 2.2 on tire que  $x'_0$  et  $y_0$  sont  $J$ -équivalents dans  $A^*/\delta$ , de même pour  $x'_1$  et  $y_1$ . Si  $x_0$  est préfixe de  $x'_0$  on a  $x'_0 \leq_m x_0 \leq_m x'_0$  et donc  $x_0 \alpha_m = x'_0 \alpha_m$ . Donc  $x_0$  et  $x'_0$  sont  $J$ -équivalents dans  $A^*/\delta$ , et par conséquent dans  $C$ . De plus  $x'_1$  est suffixe de  $x_1$  et l'hypothèse que  $[x]_{1_\gamma}$  n'est pas dans l'idéal 0-minimal entraîne que  $[x'_1]_\gamma$  n'y est pas non plus. On voit que  $[x'_0]_\gamma J [y_0]_\gamma$  dans  $C$  et aussi  $[x'_1]_\gamma J [y_1]_\gamma$ . Comme la catégorie  $C$  est  $K$ -triviale on conclut  $x \gamma y$ . Par symétrie, on traite le cas où  $x'_0$  est préfixe de  $x_0$ .

*Cas 2* :  $x$  ne possède pas de factorisation  $x = x_0 x_1$  avec  $x_0, x_1 \notin J \cup I$ ; par symétrie,  $y$  n'en possède pas non plus. Supposons alors que  $x = x_0 a x_1$  avec  $[x_0]_\gamma, [x_1]_\gamma \notin J \cup I$ . Le même argument qu'au cas précédent nous permet d'établir l'existence de factorisations  $x = x'_0 a x'_1$ ,  $y = y_0 a y_1$  avec  $[x'_0]_\gamma J [y_0]_\gamma$  et  $[x'_1]_\gamma J [y_1]_\gamma$ . La  $K$ -trivialité de  $C$  nous amène à conclure  $x \gamma y$ .

*Cas 3* :  $x$  ne possède pas de factorisation  $x = x_0 a x_1$  avec  $[x_0]_\gamma, [x_1]_\gamma \notin J \cup I$ . Par symétrie  $y$  n'en possède pas non plus. Soit  $x = x_0 a x_1$  avec  $|x_0|$  maximal tel que  $[x_0]_\gamma \notin J \cup I$ . Alors  $[x_0 a]_\gamma \in J \cup I$  et  $[x_1]_\gamma \in J \cup I$ . Donc  $[x]_\gamma \in I$ . De même  $[y]_\gamma \in I$ . Comme  $x \sim y$  et que  $I$  est trivial on a encore  $x \gamma y$ . ■

Nous pouvons utiliser les mêmes idées pour obtenir une preuve d'un théorème de Brzozowski et Simon [1].

THÉORÈME 3.3 : Soit  $C = A^*/\gamma$ . Alors  $\gamma \cong \alpha_1$  ssi  $C_{ii}$  est idempotent et commutatif.

■ Comme  $A^*/\alpha_1$  satisfait à la condition, la même chose doit être vraie pour  $A^*/\gamma$ . Pour la deuxième implication, comme pour le théorème précédent, on peut supposer que  $C$  est fortement connexe et possède un unique idéal 0-minimal. Soit  $A' = \{a \mid [a]_i \in I\}$ . Si  $|A'| < |A|$ , on déduit le résultat par récurrence sur la cardinalité de l'alphabet. Sinon  $C$  est engendré par  $C-I$ : On va montrer que cela mène à une contradiction. Soit  $x \in J$ : il existe  $y \in C-I$  tel que  $xy \in C_{ii}$ . Comme  $x = yv$ , on a  $x = yv = yvvy = xyv$  et donc  $xy \in J$ . Cette  $J$ -classe contient donc un idempotent et par le lemme 3.1,  $C-I$  doit être une sous-catégorie. ■

#### BIBLIOGRAPHIE

1. J. A. BRZOWSKI et I. SIMON, *Characterization of Locally Testable Events*, *Discrete Math.*, vol. 4, 1973, p. 243-271.
2. S. EILENBERG, *Automata, Languages and Machines*, vol. B., Academic Press, New York, 1976.
3. R. KNAST, *A semigroup Characterization of Dot-depth one Languages*, *RAIRO Informatique Théorique*, vol. 17, 1984, p. 321-330.
4. J. E. PIN, H. STRAUBING et D. THÉRIEN, *Locally Trivial Categories and Unambiguous Concentration*, accepté pour publication dans *J. P. Ap. A.*, 1986.
5. H. STRAUBING et D. THÉRIEN, *Partially Ordered Finite Monoids and a Theorem of I. Simon*, Technical Report SOCS-85-10, McGill University, 1985, soumis pour publication.
6. D. THÉRIEN et M. SZNAJDER-GLÓDOWSKI, *Finite Categories and Regular Languages*, Technical Report SOCS-85-24, McGill University, 1985.
7. D. THÉRIEN et A. WEISS, *Graph Congruences and Wreath Products*, *J. P. Ap. Alg.*, vol. 36, 1985, p. 205-215.
8. B. TILSON, *Categories as Algebras, an Essential Ingredient in the Theory of Monoids*, accepté pour publication dans *J. P. Ap. A.*, 1986.
9. A. WEISS et D. THÉRIEN, *Varieties of Finite Categories*, accepté pour publication dans *RAIRO Informatique Théorique*, 1986.