

G. BONNEAU

Poids et équivalence des codes linéaires

Informatique théorique et applications, tome 21, n° 3 (1987), p. 331-339.

http://www.numdam.org/item?id=ITA_1987__21_3_331_0

© AFCET, 1987, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Informatique théorique et applications » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*

<http://www.numdam.org/>

POIDS ET ÉQUIVALENCE DES CODES LINÉAIRES (*)

par Pierre G. BONNEAU (1)

Communiqué par J.-E. PIN

Résumé. – Sur F^n , où F est un corps fini, nous envisageons les poids W de la forme suivante :

$$W(x) = \sum_{i=1}^n \delta(x_i) \text{ où } x = (x_1, \dots, x_n) \text{ et } \delta : F \rightarrow R_+ \text{ est une application telle que } \delta(0) = 0 \text{ et } \delta(a) > 0$$

pour au moins un $a \in F$. Nous montrons l'intérêt de cette notion dans de nombreuses questions de la théorie des codes correcteurs. Puis nous prouvons que les applications semi-linéaires $f : C \rightarrow F^n$ qui préservent le poids W sur un code linéaire C dans F^n peuvent être étendues en des applications semi-linéaires définies partout sur F^n et qui préservent le poids de Hamming sur tout F^n . Si nous supposons de plus que le code linéaire C est projectif, alors un tel prolongement est unique. Il préserve W sur F^n .

Abstract. – I investigate weights W of the following kind on F^n , where F is a finite field:

$$W(x) = \sum_{i=1}^n \delta(x_i) \text{ where } x = (x_1, \dots, x_n) \in F^n, \text{ and } \delta : F \rightarrow R_+ \text{ satisfies } \delta(0) = 0 \text{ and } \delta(a) > 0 \text{ for at}$$

least one $a \in F$. I show that this idea is interesting in numerous topics in the theory of error-correcting codes. Then, I prove that, when C is a linear code in F^n , the semi-linear maps $f : C \rightarrow F^n$ which preserve W can be extended to semi-linear maps defined everywhere on F^n and which preserve the Hamming weight. If one assumes also that C is projective, then such an extension is unique. It preserves W on F^n .

I. INTRODUCTION

Deux questions ont inspiré cet article : la première concerne le problème de l'équivalence des codes linéaires, la seconde la définition d'un cadre général dans lequel on peut étudier les diverses métriques et compositions de la théorie des codes.

(*) Reçu avril 1986, révisé décembre 1986.

(1) I.N.R.I.A., Domaine de Voluceau, 78153 Le Chesnay Cedex et : The Ohio State University, Department of Mathematics, 231 West 18th Avenue, Columbus, Ohio 43210-1174.

Commençons par ce dernier point qui conditionne tout l'article. Les métriques de Hamming et de Lee sont de la forme suivante : la distance $d(x, y)$ entre deux éléments $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$ d'une puissance F^n d'un corps fini F est $d(x, y) = \sum_{i=1}^n \delta(x_i - y_i)$ où l'application $\delta: F \rightarrow R_+$ vérifie

$\delta(0) = 0$, $\delta(a) > 0$ pour au moins un $a \in F$. Ces conditions n'entraînent pas que d est bien une distance, mais les résultats de cet article seront valables dans ce cadre. De plus ce cadre permet d'interpréter très simplement les compositions (poids généralisés) envisagées par Goldberg dans [3]. Il s'adapte également aux problèmes métriques posés par la démultiplication [7].

Le second point concerne la notion d'équivalence entre codes. La définition qui nous semble la plus naturelle est la suivante : deux codes C, D dans F^n sont équivalents s'il existe une bijection $f: F^n \rightarrow F^n$ qui préserve d — i. e. $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$ pour tout $x, y \in F^n$ — et telle que $f(C) = D$. Ce point de vue a été adopté dans [2] chapitre 3 pour les métriques de Hamming. Nous avons prouvé qu'il est équivalent à celui de [5], p. 40. Les isométries de Hamming sont en effet de la forme $[\Pi, s]$ suivante, où Π désigne un n uplet (Π_1, \dots, Π_n) de permutations de F et s une permutation de $\{1, \dots, n\}$:

$$[\Pi, s]: (x_1, \dots, x_n) \rightarrow (y_1, \dots, y_n)$$

avec $y_i = \Pi_{s^{-1}(i)}(x_{s^{-1}(i)})$. A la connaissance de l'auteur, un problème analogue, mais où d n'est pas nécessairement la distance de Hamming, n'a jamais été abordé.

Dans le cas où C et D sont supposés linéaires, il est naturel d'exiger de plus que l'application f soit semi-linéaire. Montpetit [6], discute des changements que cela entraîne. Le cas où f est définie sur C seulement a été étudié. Dans le cas des « poids généralisés » de Goldberg, si une telle application est linéaire, alors elle se prolonge sur F^n en une application linéaire qui préserve d sur tout F^n . C'est le résultat principal de [3] qui généralise un résultat antérieur de MacWilliams [4].

Nos conclusions sont essentiellement les suivantes : une application semi-linéaire définie sur un code linéaire C et qui y préserve une application d comme ci-dessus se prolonge sur F^n en une application semi-linéaire qui préserve partout la distance de Hamming. Si de plus nous supposons C projectif, alors un tel prolongement est unique et préserve d partout.

Voici le plan de l'article:

- le paragraphe 2 est divisé en deux sections. La première étudie la structure et des exemples d'applications d . La seconde introduit certaines

applications semi-linéaires (celles qui préservent d sur F^n ainsi que cela sera prouvé ultérieurement).

● le paragraphe 3 démontre les conclusions que nous avons annoncées ci-dessus. Il se termine par un contre-exemple.

Les critiques constructives du referee anonyme ont amélioré sensiblement le présent article.

II. POIDS ET APPLICATIONS ÉLÉMENTAIRES

I. Poids

Soit F un corps fini, $n > 0$ un entier. La composante d'indice i d'un élément x de F^n est notée x_i . Nous nous intéresserons à des applications $d: F^n \times F^n \rightarrow IR_+$ (ensemble des réels ≥ 0) de la forme suivante :

$$d(x, y) = \sum_{i=1}^n \delta(x_i - y_i)$$
 où δ est une application $F \rightarrow IR_+$. Nous supposons que $\delta(0) = 0$ et $\delta(a) > 0$ pour au moins un $a \in F$.

Une telle application δ sera appelée *masse* sur F . Nous appellerons $W(x) = \sum_{i=1}^n \delta(x_i)$ le *poids* d'un élément x de F^n . Nous adjoindrons δ en indice quand il sera utile de préciser la masse considérée.

Ainsi que le montrent les exemples suivants, les poids ainsi définis ont un grand intérêt en théorie des codes correcteurs :

(a) Un sous-groupe H du groupe multiplicatif F^\times étant choisi, posons

$$\begin{aligned} \delta_H(a) &= 1 & \text{si } a \in H \\ \delta_H(a) &= 0 & \text{si } a \notin H \end{aligned}$$

et

$$W_H(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \delta_H(x_i) \quad \text{où } \mathbf{x} = (x_1 \dots x_n).$$

Lorsque $H = F^\times$, d est la *distance de Hamming*. Elle jouera un rôle particulièrement important dans cet article. Nous noterons h la masse dont elle se déduit et identifierons, si le besoin s'en fait sentir, les notions qui lui sont relatives par l'indice h ou le qualificatif « de Hamming ».

Dans le cas général, choisissons un système de représentants $1 = \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_v$ des classes de H dans F^\times . La famille $(\delta_H(\alpha_1^{-1}x), \dots, \delta_H(\alpha_v^{-1}x))$

n'est autre que le « poids généralisé » défini par Goldberg dans [3] pour un élément x de F^n . Ainsi que cet auteur le fait remarquer, on retrouve, outre le poids de Hamming, des notions très classiques en théorie des codes (voir [1], [5] par exemple) :

- pour $H = \{ 1 \}$ le poids complet
- si l'ordre q de F est impair et $H = \{ -1, 1 \}$, la composition de Lee.

(b) Toujours quand $q = 2r + 1$ est impair et $H = \{ -1, 1 \}$, choisissons un élément α d'ordre r dans F^\times (i. e. un générateur du sous-groupe des carrés de F^\times). On voit facilement que le poids de Lee ([1], [5]) d'un élément x de F^n est $\sum_{i=1}^r i W_H(\alpha^{-i} x)$. C'est le poids associé à la masse $a \rightarrow \sum_{i=1}^r i \delta_H(\alpha^{-i} a)$.

(c) Supposons que $q = p^s$, s entier > 0 . Alors F est une extension de degré s de son unique sous-corps K d'ordre p . Soit e_1, \dots, e_s une base de F en tant que K -espace vectoriel. Un élément α de F étant décomposé en $a = \sum_{k=1}^s \alpha_k e_k$ dans cette base, une masse δ_K sur F est définie par $\delta_K(a) = W_h(\alpha)$ où $\alpha = (\alpha_k)_{1 \leq k \leq s}$. Cette masse dépend en général de la base choisie. La distance déduite de la masse δ_K munit F^n d'une structure d'espace métrique isomètre à K^{ns} muni de la distance de Hamming. Le procédé qui consiste à déduire d'un code linéaire de longueur n sur F (i. e. un F -sous-espace vectoriel de F^n), un code linéaire de longueur ns sur K en décomposant chacune des composantes d'un mot du F -code suivant la base e_1, \dots, e_s s'appelle démultiplication (voir [7]).

2. Applications élémentaires

Considérons une masse δ sur F . Les applications δ -élémentaires que nous introduisons ci-dessous seront caractérisées dans la proposition 1 du prochain paragraphe comme les seules applications semi-linéaires qui préservent sur F^n le poids W associé à δ . Toutes préservent le poids de Hamming.

Une *semi-homothétie* est une application semi-linéaire non nulle $F \rightarrow F$ (i. e. une application de la forme $x \rightarrow a \sigma(x)$, où $a \neq 0$ appartient à F et σ au groupe $\text{Aut } F$ des automorphismes de F). Une δ -dilatation est une application semi-linéaire $F^n \rightarrow F^n$ de la forme $(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (f_1(x_1), \dots, f_n(x_n))$ où les f_i sont des semi-homothéties qui préservent $\delta(\delta(f_i(x)) = \delta(x)$ pour tout $x \in F$) et ont le même automorphisme associé (une δ -dilatation est donc semi-linéaire). Soient maintenant s un élément du groupe Σ_n des permutations de $\{ 1, 2, \dots, n \}$, $\sigma \in \text{Aut } F$, a_i une suite de n éléments non nuls de F . Notons

$[s, \sigma, a_1, \dots, a_n]$ l'application $g: F^n \rightarrow F^n$ définie par $g(x)_{s(i)} = a_i \sigma(x_i)$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$. Une application δ -élémentaire est une application de cette forme où les semi-homothéties $x \rightarrow a_i \sigma(x)$ préservent δ . Les h -dilatations et applications h -élémentaires sont appelées plus simplement dilatations et applications élémentaires.

Pour décrire les applications δ -élémentaires lorsque δ est une des masses envisagées dans les exemples ci-dessous, il suffit de donner une condition nécessaire et suffisante portant sur le couple (a, σ) , $a \in F^\times$, $\sigma \in \text{Aut } F$, pour que la semi-homothétie $x \rightarrow a \sigma(x)$ préserve δ . Nous conservons les notations de chaque exemple. On voit sans trop de peine que dans l'exemple (a), la condition cherchée est : $a \in H$. De même, dans l'exemple (b), c'est : $a \in \{-1, 1\}$. L'exemple (c) est plus difficile à traiter. Remarquons que $(a, b) \rightarrow \delta_K(a-b)$ est la distance de Hamming, F étant identifié à K^s par décomposition sur la base (e_1, \dots, e_s) . Donc la condition que nous cherchons est équivalente à : pour tout $i \in \{1, \dots, s\}$, $a \sigma(e_i)$ est de la forme λe_j où $\lambda \in K$. Nous ne l'expliciterons pas plus dans le cas général. Remarquons seulement que les bases normales ([5], p. 120, 4) conduisent à un groupe cyclique d'ordre s d'applications préservant δ_K : les automorphismes de Galois.

III. PROLONGEMENT

1. Conventions et lemme sur les codes linéaires

Si C est un code linéaire dans F^n , sa *forme coordonnée* d'indice $i \in \{1, \dots, n\}$, notée l_i ou $l_{i,C}$ si nécessaire, est la restriction à C de la forme linéaire :

$$\begin{aligned} F^n &\rightarrow F \\ x &\rightarrow x_i \end{aligned}$$

Le noyau de cette forme est noté C_i . Puisque la condition « $l_i(x) = 0$ pour tout i » entraîne que $x = 0$, les l_i engendrent l'espace vectoriel C' dual de C . Nous noterons Z [ou $Z(C)$ si nécessaire] l'ensemble des indices i tels que $l_i = 0$. Leur nombre est noté z . Le complémentaire de Z dans $\{1, \dots, n\}$ est noté N , son nombre d'éléments m . On remarquera que $z + m = n$, et que si $i \in N$, alors pour chaque $a \in F$, l'ensemble $C_i(a)$ formé par les éléments x de C tels que $x_i = a$ est un hyperplan affine de C de direction C_i . Son nombre d'éléments est donc q^{k-1} , k désignant la dimension de C . On remarquera également que $Z(C_i)$ a pour éléments les indices j tels que $l_{j,C}$ appartient à

la droite vectorielle engendrée par $l_{i,C}$. Nous noterons $Z_i = Z(C_i)$, $m_i = m(C_i)$ et ainsi de suite.

Le lemme suivant se définit facilement des remarques précédentes, en considérant la contribution de chaque indice aux sommes envisagées.

LEMME : Soit y un élément de F^n . Avec les notations introduites ci-dessus, et $S = \sum_{a \in F} \delta(a)$

$$(a) \sum_{x \in C} W(y-x) = m S q^{k-1} + q^k \sum_{j \in Z} \delta(y_j)$$

(b) Si $l_i \neq 0$,

$$\sum_{x \in C_i} W(y-x) = m_i S q^{k-2} + q^{k-1} \sum_{j \in Z_i} \delta(y_j).$$

(c) Si H est un hyperplan vectoriel de C , et n'est pas un des C_i pour $i \in N$, $\sum_{x \in H} W(y-x) = m S q^{k-2} + q^{k-1} \sum_{j \in Z} \delta(y_j)$.

2. Les résultats de prolongement

Considérons une application semi-linéaire $f: C \rightarrow F^n$ qui préserve W . Remarquons que f est injective (car si $x \in \text{Ker } f$, alors pour tout $\alpha \in F$, $W(\alpha x) = 0$, ce qui entraîne clairement que $x = 0$). L'image D de f est donc un code linéaire de dimension k . La formule (a), appliquée à $y = 0$, montre que C et D ont le même nombre de positions non nulles. En comparant (b) et (c) appliqués à $y = 0$, on voit que parmi les hyperplans vectoriels de C (ou de D), ceux pour lesquels la somme des poids est maximale sont ceux qui ne sont pas de la forme C_i (ou D_i) pour $i \in N$. Un hyperplan de la forme C_i est donc appliqué sur un hyperplan de la forme D_j . La formule (b) montre aussi que $m(C_i) = m(D_j)$.

Pour prouver le résultat suivant, on peut donc, quitte à remplacer D par un code qui s'en déduit par une permutation des indices, supposer que $f(C_i) = D_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$.

PROPOSITION : Soit δ une masse, C un code linéaire de longueur n sur F , $f: C \rightarrow F^n$ une application semi-linéaire qui préserve W . Alors f se prolonge en une application élémentaire.

Démonstration : Comme nous l'avons vu précédemment, il suffit de traiter le cas où $f(C_i) = D_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ [nous posons $D = f(C)$]. Dans ce cas f se prolonge en une dilatation. En effet, un indice i étant fixé, $f(x)_i$ ne dépend que de x_i . Supposons que $C \neq \{0\}$.

Soit σ l'automorphisme associé à f . Définissons $f_i = \sigma$ pour $i \in Z$; sinon f_i est l'application telle que $f(x)_i = f_i(x_i)$ pour tout $x \in C$ (donc pour $i \in N$, $f_i = f_i(1) \sigma$). Il est immédiat que $g : x \rightarrow (f_1(x_1), \dots, f_n(x_n))$ est bien une dilatation et que f et g coïncident sur C .

COROLLAIRE 1 : *Sous les hypothèses de la proposition 1, f préserve le poids de Hamming.*

Jusqu'à la fin de ce paragraphe, nous supposons que C est un code projectif, c'est-à-dire que C est linéaire et que ses formes coordonnées sont deux à deux linéairement indépendantes.

PROPOSITION 2 : *Soient $g = [s, \sigma, a_1, \dots, a_n]$ et $g' = [s', \sigma', a'_1, \dots, a'_n]$ des applications élémentaires qui coïncident sur C . Alors $s = s'$, $\sigma = \sigma'$, $a_1 = a'_1, \dots, a_n = a'_n$.*

Démonstration : Posons $D = f(C)$, où f est la restriction commune de g et g' à C , et remarquons que $f^{-1}(D_i) = C_{s^{-1}(i)} = C_{s'^{-1}(i)}$ pour tout indice i . Puisque C est projectif, $s = s'$ et il suffit de traiter le cas où $s = s' = \text{id}$. Considérons $a \in F$, $i \in \{1, \dots, n\}$, x un mot de C tel que $x_i = a$. La composante en i de $f(x)$ est $a_i \sigma(a) = a'_i \sigma'(a)$. Ceci étant vrai pour tout a , $a_i = a'_i$ et $\sigma = \sigma'$.

La conclusion de la proposition 2 montre que $g = g'$. Mais cette proposition prouve de plus que toute application élémentaire s'écrit de manière unique sous la forme $[s, \sigma, a_1, \dots, a_n]$.

PROPOSITION 3 : *Toute application semi-linéaire $f : C \rightarrow F^n$ qui préserve le poids W associé à une masse δ se prolonge en une application δ -élémentaire.*

Démonstration : Comme d'habitude, il suffit de traiter le cas où $f(C_i) = D_i$ pour tout indice i . Alors, l'unique prolongement g de f en une application élémentaire est une dilatation (ce prolongement existe d'après la proposition 1, c'est une dilatation d'après la démonstration de la proposition 2). En notant $g = [\text{id}, \sigma, a_1, \dots, a_n]$, il reste à voir que les applications $g_i : a \rightarrow a_i \sigma(a)$ préservent δ . Pour ce faire, on applique l'assertion (b) du lemme à un indice i quelconque. Puisque C , et donc son image D , sont projectifs, $Z(C_i) = Z(D_i) = \{i\}$. Soient $a \in F$, $i \in \{1, \dots, n\}$, y un mot de C tel que $y_i = a$.

$$\begin{aligned} \sum_{x \in C_i} W(y-x) &= (n-1)q^{k-2}S + q^{k-1}\delta(a) \\ &= \sum_{x \in C_i} W(g(y)-g(x)) \\ &= \sum_{x \in D_i} W(g(y)-x) \\ &= (n-1)q^{k-2}S + q^{k-1}\delta(g_i(a)). \end{aligned}$$

On obtient bien $\delta(a) = \delta(g_i(a))$.

3. Commentaires

Dans [3], Goldberg considère des applications linéaires f qui préservent sur un code linéaire C sa notion de « poids généralisé » [voir l'exemple (a) ci-dessus]. Or une application linéaire qui préserve le « poids généralisé » associé à un sous-groupe H de F^\times préserve δ_H et réciproquement. Goldberg conclut qu'une telle application se prolonge en une application δ_H -élémentaire et linéaire. Dans le cas des corps premiers et du poids de Hamming, ce résultat avait déjà été prouvé par MacWilliams dans [4]. Nous n'avons pas retrouvé le résultat de Goldberg dans toute sa généralité, car nous avons supposé que C est projectif dans la proposition 3.

En revanche, la proposition 1 est valable pour des poids beaucoup plus généraux que ceux qui ont été considérés jusqu'à présent, et elle s'applique aux applications semi-linéaires et pas seulement linéaires. Les problèmes d'unicité des prolongements n'ont jamais été abordés.

4. Un contre-exemple

Nous montrons que l'hypothèse de projectivité de la proposition 3 est utile si aucune restriction n'est faite sur la masse considérée.

Prenons $q=5$ et choisissons un élément primitif α de F^\times . Considérons la masse δ définie par $\delta(1) = \delta(-\alpha) = 1$, $\delta(-1) = \delta(\alpha) = 0$. Notons encore :

$$C = \{ (x, \alpha x, -x, -\alpha x), x \in F \}$$

$$D = \{ (x, x, -x, -x), x \in F \}.$$

Le poids de chaque élément non nul de C et D est 2 (en effet $\delta(a) + \delta(-a) = 1$ pour tout $a \in F^\times$). Prouvons qu'ils ne se déduisent pas l'un de l'autre par une application δ -élémentaire. Si tel était le cas, le code $C' = \{ (x, \alpha x), x \in F \}$ qui s'obtient à partir de C en supprimant les 3^e et 4^e coordonnées, se déduirait par une application δ -élémentaire d'un code qui s'obtient à partir de D en supprimant deux coordonnées. Ces derniers codes sont soit $\{ (x, x), x \in F \}$, soit $\{ (x, -x), x \in F \}$. Leur distribution des poids est différente de celle de C' , contradiction.

BIBLIOGRAPHIE

1. E. R. BERLEKAMP, *Algebraic Coding Theory*, McGraw-Hill, 1968.
2. P. BONNEAU, *Codes et Combinatoire*, Thèse de troisième cycle, Université Paris-VI, 1984.

3. D. GOLDBERG, *A Generalized Weight for Linear Codes and a Witt-MacWilliams Theorem*, J.C.T. Series, A 29, 1980, p. 363-367.
4. F. J. MACWILLIAMS, *Combinatorial Problems of Elementary Group Theory*, Ph. D. Thesis, Harvard University, 1962.
5. F. J. MACWILLIAMS et N. J. A. SLOANE, *The Theory of Error-Correcting Codes*, North-Holland, third printing, 1981.
6. A. MONTPETIT, *Note sur la notion d'équivalence entre deux codes*, Discrete Math. (à paraître).
7. J. WOLFMANN, *Différents aspects de la démultiplication des codes*, Traitement du Signal, vol. 1, n° 2, hors série, 1984.