RAIRO
INFORMATIQUE THÉORIQUE

JEAN-JACQUES PANSIOT

Mots infinis de Fibonacci et morphismes itérés

RAIRO – Informatique théorique, tome 17, nº 2 (1983), p. 131-135.
<http://www.numdam.org/item?id=ITA_1983__17_2_131_0>

R.A.I.R.O. Informatique théorique/Theoretical Informatics
(vol. 17, n° 2, 1983, p. 131 à 135)

MOTS INFINIS DE FIBONACCI ET MORPHISMES ITÉRÉS (*)

par Jean-Jacques PANSIOT (¹)

Communiqué par J. BERSTEL

Résumé. — *Nous montrons que tous les morphismes itérés qui engendrent le mot infini de Fibonacci sur k lettres sont des puissances d'un même morphisme.*

Abstract. — *We show that all iterated morphisms generating the infinite Fibonacci word on k letters are powers of a single morphism.*

INTRODUCTION

Soit f le morphisme du monoïde $\{a, b\}^*$, défini par $f(a)=ab$, $f(b)=a$. En itérant le morphisme f, on obtient le mot infini de Fibonacci F, $F=abaababaabaababaabab...$ Ce mot a été étudié par divers auteurs, *voir* par exemple l'exposé de J. Berstel [1] sur les propriétés des facteurs de F. Appelons rigide de base h un mot infini tel que tout morphisme qui l'engendre par itération soit une puissance du morphisme h. Nous allons montrer que F est rigide de base f, et plus généralement si on considère le mot infini de Fibonacci sur $k+1$ lettres engendré par le morphisme g, $g(a_0)=a_0 a_1 \ldots a_k$, $g(a_i)=a_{i-1}$, $i=1, \ldots, k$, il est rigide de base g.

On connaît déjà plusieurs mots infinis rigides, dont le mot de Thue (ou de Morse) [2], et un mot étudié en connection avec les répétitions dans les mots sur un alphabet à quatre lettres [3]. Le mot de Fibonacci généralisé est le premier mot rigide connu sur un alphabet à plus de deux lettres.

Dans le paragraphe suivant nous donnons des propriétés des facteurs de F, que nous utilisons dans le dernier paragraphe pour obtenir notre résultat.

(*) Reçu septembre 1982.
(¹) Centre de Calcul de l'Esplanade, U.E.R. de Mathématique, 7, rue René-Descartes, 67084 Strasbourg Cedex.

QUELQUES PROPRIÉTÉS DU MOT DE FIBONACCI GÉNÉRALISÉ

Dans tout ce qui suit k est un entier fixé, $k \geqq 1$, et $X=\{a_0, a_1, \ldots, a_k\}$. Le morphisme $g : X^* \to X^*$ est défini par :

$$g(a_0)=a_0 a_1 \ldots a_k, \qquad g(a_i)=a_{i-1}, \qquad i=1, \ldots, k.$$

Soit $G_i=g^i(a_0)$, $i \geqq 0$. On observe que G_{i+1} commence par G_i et on note $G=g^{\omega}(a_0)$ le mot infini obtenu comme limite de la suite G_i, $i \geqq 0$. Soit $G_{-i}=g^{-i}(a_0)=a_i$, $0 \leqq i \leqq k$, ce qui a un sens car $g^i(g^{-i}(a_0))=a_0$. On pose :

$$X_i=\{G_{i-k}, G_{i-k+1}, \ldots G_i\}, \qquad i \geqq 0,$$

en particulier on peut identifier X_0 et X. Un mot est i-factorisable s'il appartient à X_i^* (ou à X_i^{ω} s'il est infini) $i \geqq 0$. On a les propriétés suivantes.

PROPRIÉTÉ 1 : On a la relation $G_1=G_0 G_{-1} \ldots G_{-k}$, et par application de g^i, $G_{i+1}=G_i G_{i-1} \ldots G_{i-k}$. En particulier G est i-factorisable, $i \geqq 0$.

PROPRIÉTÉ 2 : L'ensemble X_i est un code suffixe car chacun de ses mots se termine par une lettre distincte. Tout mot fini a donc au plus une i-factorisation.

PROPRIÉTÉ 3 : La i-factorisation de G est unique, $i \geqq 0$.

Preuve : C'est évident pour $i=0$. Supposons qu'on ait deux i-factorisations de G, $i>0$, $G=G_{i_1} G_{i_2} \ldots = G_{j_1} G_{j_2} \ldots$ Soit n le premier indice tel que $i_n \neq j_n$. Si on remplace toutes les occurrences de G_i par $G_{i-1} \ldots G_{i-1-k}$ on obtient deux $(i-1)$-factorisations. Si G_{i_n} et G_{j_n} sont différents de G_i, ces deux $i-1$ factorisations sont distinctes ce qui est impossible par hypothèse de récurrence. Donc par exemple $G_{i_n}=G_i \neq G_{j_n}$. Mais alors les premières occurrences de G_{i-1-k} dans les deux $i-1$ factorisations ne peuvent coïncider ce qui est impossible et il y a donc bien une seule i-factorisation.

PROPRIÉTÉ 4 : Dans la i-factorisation de G, tout facteur G_{i-p}, $0 \leqq p < k$, est suivi soit de G_{i-p-1} soit de G_i, et G_{i-k} est toujours suivi de G_i.

Cette propriété se montre aisément pour $i=0$, et on l'induit pour tout i en observant que la i-factorisation de G s'obtient en regroupant en G_i les facteurs $G_{i-1} \ldots G_{i-1-k}$ de la $(i-1)$-factorisation.

PROPRIÉTÉ 5 : Les mots $a_0 a_0$, et donc $G_i G_i$, $i \geqq 0$, sont facteurs de G.

PROPRIÉTÉ 6 : Si $G=\alpha G_{i+1} \beta$, $i \geqq 0$, alors la i-factorisation de G factorise α, et le facteur qui suit α est G_i.

Preuve : Pour $i=0$ c'est évident. Supposons, pour $i \geqq 1$:

$$G=\alpha G_{i+1} \beta=\alpha G_i G_{i-1} \ldots G_{i-k} \beta=\alpha G'_{i-1} \ldots G'_{i-1-k} G_{i-1} \ldots G_{i-k} \beta.$$

Par hypothèse de récurrence, la $(i-1)$-factorisation de G factorise α, et le facteur qui suit est G'_{i-1}. La i-factorisation de G est obtenue en regroupant des facteurs $G''_{i-1} \ldots G''_{i-1-k}$ en G''_i. Un tel regroupement ne peut chevaucher α et G'_{i-1}, donc la i-factorisation de G factorise α, et le facteur qui suit est soit G_i, s'il y a regroupement, soit G'_{i-1}. Montrons que ce ne peut être G'_{i-1}. Si c'était le cas, la i-factorisation de $G_{i+1}\,\beta$ serait de la forme :

$$G'_{i-1} \ldots G'_{i-j}\, G'_i \ldots = G'_{i-1} \ldots G'_{i-j}\, G''_{i-1} \ldots G''_{i-k-1}, \ \ldots, j \geqq k.$$

On aurait alors deux $(i-1)$-factorisations distinctes pour le mot :

$$G'_{i-1} \ldots G'_{i-j}\, G''_{i-1} \ldots G''_{i-k-1} = G'_{i-1} \ldots G'_{i-k-1}\, G_{i-1} \ldots G_{i-j}.$$

C'est impossible par la propriété 2, et donc le facteur qui suit α dans la i-factorisation est G_i.

On peut donner une propriété un peu plus forte en observant que la $(i+1)$-factorisation de G ne peut chevaucher α et G_{i+1} :

PROPRIÉTÉ 7 : Si $G = \alpha\, G_{i+1}\, \beta$, $i \geqq 0$, alors la $(i+1)$-factorisation de G factorise α et le facteur qui suit α est soit G_i soit G_{i+1}.

En corollaire on a la propriété suivante :

PROPRIÉTÉ 8 : Si $G_i\, u\, G_i$, $i \geqq 0$ est un facteur de G alors $G_i\, u$ est i-factorisable.

En remarquant que dans la i-factorisation de G le plus long mot séparant deux occurrences successives de G_i est $G_{i-1} \ldots G_{i-k}$, et que $|G_{i-1} \ldots G_{i-k}| = |G_i| - |G_{i-k-1}|$, on a :

PROPRIÉTÉ 9 : Dans la i-factorisation de G, $i \geqq 1$, deux occurrences successives de G_i sont séparées par un mot de longueur strictement inférieure à $|G_i|$. On a aussi $|G_{i+1}| < 2\,|G_i|$.

RIGIDITÉ DE G

Soit h un morphisme de X^* dans X^* tel que $h^\omega(a_0) = G$. Nous allons montrer que h est une puissance de g.

PROPOSITION 1 : *Pour tout* $i \geqq 1$ *il existe* j *et* p, $j \geqq i$, $0 \leqq p < k$ *tels que* $h(G_i) = G_j\, G_{j-1} \ldots G_{j-p}$.

Preuve : Soit j l'entier défini par $|G_j| \leqq |h(G_i)| < |G_{j+1}|$. On a bien $j \geqq i$, sinon $h^\omega(G_i)$ ne serait pas infini.

Comme G commence par G_i, et donc par $h(G_i)$, ainsi que par $G_{j+1}=G_j G_{j-1} \ldots G_{j-k}$, on a $h(G_i)=G_j u$, où u est un facteur gauche de $G_{j-1} \ldots G_{j-k}$. D'autre part G contient des occurrences de $G_i G_i$ (propriété 5), donc de $h(G_i G_i)=G_j u G_j u$. Par la propriété 8, $G_j u$ est j-factorisable, et par la propriété 9 sa j-factorisation contient exactement un facteur G_j, soit $G_j u=\alpha G_j \beta$, α et β j-factorisables. Mais par la propriété 7, la j-factorisation de G commence par la j-factorisation de α. Donc α est vide et $u=\beta$ est j-factorisable, soit $h(G_i)=G_j G_{j-1} \ldots G_{j-p}$ pour un certain $p<k$.

Proposition 2 : *Si* $h(G_i)=G_j \ldots G_{j-p}$, $i \geqq 1$, $j \geqq i$, $0 \leqq p<k$ *alors* $h(G_{i+1})=G_{j+1}$.

Preuve : Soit $h(G_i)=G_j \ldots G_{j-p}$. Comme G commence par $G_{i+1} G_i$, donc par :

$$h(G_{i+1} G_i)=h(G_i G_{i-1} \ldots G_{i-k} G_i)$$

$$=G_j \ldots G_{j-p} h(G_{i-1} \ldots G_{i-k}) G_j \ldots G_{j-p},$$

par la propriété 7, $h(G_{i-1} \ldots G_{i-k})$ est j-factorisable, soit $h(G_{i-1} \ldots G_{i-k})=G_{j-p-1} \ldots G_{j-k} u$, u j-factorisable. Si u était non vide il commencerait par G_j. Mais alors la j-factorisation de G commencerait par $h(G_i)=h(G_{i-1} \ldots G_{i-k})=G_{j-p-1} \ldots G_{j-k} \ldots$ ce qui est impossible car $j-p-1<j$. Donc u est vide et :

$$h(G_{i+1})=h(G_i G_{i-1} \ldots G_{i-k})=G_j \ldots G_{j-p} G_{j-p-1} \ldots G_{j-k}=G_{j+1}. \quad \blacksquare$$

Par la proposition 1, il existe $q \geqq 1$ et p, $0 \leqq p<k$ tels que :

$$h(G_i)=G_q \ldots G_{q-p}.$$

Par induction sur $i \geqq 2$, et en appliquant la proposition 2 on obtient :

Proposition 3 : *Il existe* $q \geqq 1$ *tel que pour* $i \geqq 2$:

$$h(G_i)=G_{q+i-1}.$$

On peut ensuite étendre cette propriété pour $i \leqq 1$:

Proposition 4 : *Il existe* $q \geqq 1$ *tel que pour* $i \geqq -k$:

$$h(G_i)=G_{q+i-1}.$$

Preuve : C'est déjà démontré pour $i \geqq 2$. Supposons que cela soit vrai pour $i \geqq l>-k$. G commence par :

$$h(G_{k+l} G_{k+l-1})=h(G_{k+l-1} \ldots G_{l-1} G_{k+l-1})$$

$$=G_{q+k+l-2} G_{q+k+l-3} \ldots G_{q+l-1} h(G_{l-1}) G_{q+k+l-2}.$$

En considérant la $q+k+l-2$ factorisation de G, on obtient que

$h(G_{l-1})=G_{q+l-2}$. ■

Comme $G_{-i}=a_i$, et en posant $n=q-1$ on a :

THÉORÈME : *Le morphisme h est égal à* g^n, *le mot infini G est donc rigide de base g.*

BIBLIOGRAPHIE

1. J. BERSTEL, *Mots de Fibonacci*, exposé au Séminaire d'Informatique théorique, Rapport LITP, 1980-1981, Paris.
2. J.-J. PANSIOT, *The Morse Sequence and Iterated Morphisms*, Inf. Proc. Lett., vol. 12, n° 2, 1981, p. 68-70.
3. J.-J. PANSIOT, A propos d'une conjecture de F. Dejean sur les répétitions dans les mots, *Actes de la Fête des Mots*, juin 1982, Rouen, également à paraître.