RAIRO
INFORMATIQUE THÉORIQUE

JACQUES SAKAROVITCH

Deux remarques sur un théorème de S. Eilenberg

RAIRO – Informatique théorique, tome 17, nº 1 (1983), p. 23-48.
<http://www.numdam.org/item?id=ITA_1983__17_1_23_0>

R.A.I.R.O. Informatique théorique/Theoretical Informatics
(vol. 17, n° 1, 1983, p. 23 à 48)

DEUX REMARQUES SUR UN THÉORÈME DE S. EILENBERG (*)

par Jacques SAKAROVITCH ([1])

Communiqué par J. BERSTEL

Résumé. — *Nous présentons ici une preuve du « cross section theorem », légèrement modifiée de l'originale. Elle permet de montrer non seulement l'existence d'une transversale rationnelle de tout ensemble rationnel mais aussi de caractériser les éléments d'une tranversale à l'aide de l'ordre lexicographique. Quelques exemples montreront également que si l'on ordonne les mots par longueur, et non plus lexicographiquement, le même procédé permet bien de définir une transversale mais qui n'est plus rationnelle.*

Abstract. — *We give here a proof of the « cross section theorem » that is slightly different from the original one. This allows us not only to show the existence of a rational cross section of any rational set but also to describe such a cross section by means of the lexicographic ordering of the words. With some examples we also show that if we use the ordering of words by length, instead of the lexicographic ordering, the cross section we get is no more rational.*

Dans son ouvrage : *Automata, Languages, and Machines* [3], S. Eilenberg énonce et établit le résultat suivant, intitulé « Cross-Section Theorem » (theorem IX, 7.1, p. 256) :

THÉORÈME 1 : *Soit* θ *un homomorphisme de* A^* *dans* X^*. *Pour tout ensemble rationnel* R *de* A^* *il existe un ensemble rationnel* T, *inclus dans* R, *tel que* θ *est une bijection de* T *sur* $\theta(R)$.

Ce résultat est une des clefs pour l'étude des relations rationnelles : on en déduit en particulier que les fonctions rationnelles sont non ambiguës (cf. [3]). Son extension à d'autres applications que les homomorphismes entre monoïdes libres apporte un outil nouveau pour l'étude des langages algébriques déterministes (cf. [5, 6]). Mon propos ici est d'établir une propriété de la construc-

(*) Reçu en juin 1982.
([1]) Laboratoire d'Informatique Théorique et Programmation, C. N. R. S., Paris et Research Institut for Mathematical Sciences, Kyoto University, Kyoto.

tion qui sert à la preuve du théorème 1 en [3], ou plutôt, une propriété que cette preuve inspire directement et que voici :

THÉORÈME 2 : *Soit A un alphabet fini et supposons choisi un ordre lexicographique sur A^*. Soit θ un homomorphisme quelconque de A^* dans un monoïde libre X^*. L'application τ, qui à tout mot f de A^* fait correspondre l'ensemble des mots de A^* qui ont même image que f par θ et qui lui sont supérieurs dans l'ordre lexicographique fixé, est une relation rationnelle.*

Pour la commodité de l'exposé, posons deux définitions :

DÉFINITION 1 : Soient θ une application d'un ensemble E dans un ensemble F et R un sous-ensemble de E. Un sous-ensemble T de E est *une transversale de R pour* θ si T est inclus dans R et si θ est une bijection de T sur $\theta(R)$.

Autrement dit, une transversale de R pour θ est un ensemble de représentants, inclus dans R, des classes de l'équivalence d'application de θ qui ont une intersection non vide avec R (le terme anglo-saxon est « cross section »).

DÉFINITION 2 : Une application θ d'un monoïde libre A^* dans un ensemble F *possède la propriété de transversale rationnelle* si chaque ensemble rationnel de A^* possède une transversale rationnelle pour θ.

Le théorème 1 énonce donc que tout homomorphisme entre monoïdes libres possède la propriété de transversale rationnelle. Sa preuve originale s'articule en deux parties. On montre d'abord que si deux homomorphismes $\theta : A^* \to X^*$, et $\psi : X^* \to Y^*$ possèdent la propriété de transversale rationnelle, il en est de même que leur composé $\psi \circ \theta$ (cf. lemme 3); on montre ensuite, et c'est le noyau de la preuve, que deux homomorphismes particuliers — particulièrement simples — possèdent cette propriété. Et comme tout homomorphisme peut se décomposer en un certain nombre de ces homomorphismes élémentaires, le théorème 1 est démontré. Comment montre-t-on que les homomorphismes particuliers possèdent la propriété de transversale rationnelle? Là encore en deux temps. Dans un premier temps on établit que ces homomorphismes, et pour un ordre lexicographique particulier qui leur est bien adapté, *vérifient précisément la propriété énoncée au théorème* 2. Dans un deuxième temps on en déduit la propriété de transversale rationnelle : soit en effet R un sous-ensemble quelconque de A^*; l'ensemble $R - \tau(R)$ — où τ est la relation définie au théorème 2 — est formé des plus petits éléments, *quand ils existent*, de l'intersection de R avec les classes de l'équivalence d'application de θ. *Il se trouve que pour les homomorphismes choisis, le plus petit élément existe toujours*, résultat d'ailleurs implicite en [3] (cf. lemme 2).

Dans ces conditions l'ensemble $R-\tau(R)$ est une transversale de R pour θ, que nous appellerons lexicographique ; puisque τ est une relation rationnelle, $R-\tau(R)$ est rationnel quand R l'est : ce qu'il fallait démontrer. Si l'on établit, comme nous allons le faire, le théorème 2 dans le cas général et non plus seulement pour les homomorphismes élémentaires l'argument précédent : $R-\tau(R)$ est rationnel quand R l'est, donne une preuve directe du théorème 1 quand, pour tout ensemble R, $R-\tau(R)$ est une transversale de R pour θ — en gros quand θ est continu. Dans le cas contraire il faudra faire appel au procédé de la preuve originale, et décomposer θ en homomorphismes plus simples. Ainsi, et ce sera notre première remarque, la preuve modifiée que nous proposons pour le théorème 1 permet non seulement d'*établir l'existence d'une transversale rationnelle* de chaque ensemble rationnel mais aussi, dans une large mesure — quand la transversale lexicographique existe et, en particulier, pour les homomorphismes continus — de *décrire quelle est cette transversale.*

L'ordre total choisi sur le monoïde libre, en l'occurrence l'ordre lexicographique, est le pivot de la preuve qui vient d'être esquissée. D'une part il donne lieu à la propriété exprimée par le théorème 2, et d'autre part il permet de définir une transversale d'un ensemble, soit directement, soit en itérant un processus de calcul. Il est naturel de vouloir « faire encore mieux » et de chercher à remplacer cet ordre lexicographique par un autre ordre total sur A^* qui soit parfaitement adapté aux deux temps de la preuve, c'est-à-dire qui permette à la fois d'énoncer le théorème 2 et de définir une transversale en choisissant le plus petit élément dans chaque classe d'équivalence et cela dans tous les cas, sans avoir à utiliser la propriété de clôture par composition des homomorphismes possédant la propriété de transversale rationnelle. Cette deuxième propriété sera en particulier satisfaite si toute partie non vide possède un plus petit élément pour cet ordre, c'est-à-dire si cet ordre est un *bon ordre.*

Actuellement je doute qu'une réponse positive puisse être apportée à ce problème, mais la question reste ouverte. Quelques exemples montreront simplement ici que le bon ordre qu'il semble le plus naturel de définir après l'ordre lexicographique, que nous appelons *ordre généalogique*, et qui est celui où les mots sont ordonnés par longueur croissante et, pour une même longueur, par l'ordre lexicographique, ne répond pas à la question car il ne permet pas d'énoncer le théorème 2. Cette seconde remarque prouve à mon sens que le « cross-section theorem », et surtout sa preuve, celle qui est en germe en [3] et développée dans cet article, établit non seulement une propriété du monoïde libre mais également une *propriété de l'ordre lexicographique.*

Pour être complet, il faut mentionner qu'il existe — au moins — une autre méthode de preuve pour le théorème 1. Il est aisé de déduire de ce théorème le résultat suivant (cf. [3]) : *Soit τ une relation rationnelle ; il existe une fonction rationnelle dont le graphe est inclus dans celui de τ, et qui a même domaine que τ.* Mais on peut aussi établir ce dernier résultat directement. C'est ce qui a été fait par K. Kobayashi [4] et par A. Arnold et M. Latteux [1]. Ces derniers auteurs en déduisent alors immédiatement le « Cross-Section Theorem ». La comparaison entre cette méthode et la preuve présentée ici reste à faire.

Cet article est divisé en deux parties. La première partie développe ce qui vient d'être esquissé dans l'introduction. Quelques exemples la closent qui montrent que la transversale calculée en [3] est en général différente de la transversale lexicographique. La seconde partie donne la preuve du théorème 2.

Cet article expose la matière du chapitre 3 de [6].

A. ORDRES ET TRANSVERSALES

1. Notations

Si n est un entier, $[n]$ désigne l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Soit A un ensemble, appelé *alphabet*, dont les éléments seront appelés *lettres*. L'ensemble des suites finies de lettres, appelées *mots*, muni de l'opération de concaténation forme le monoïde libre engendré par A, noté A^*. La suite vide, ou *mot vide*, est l'identité de A^* et est notée 1 (et quelquefois 1_{A^*}). L'ensemble des mots non vides est noté A^+.

Un mot f est un *préfixe* d'un mot g s'il existe une factorisation $g = fh$; f est un *préfixe propre* si $h \neq 1$. « Être préfixe de » est une relation d'ordre partiel sur A^* et l'on note $f \leq g$ si f est un préfixe de g, $f < g$ si f est un préfixe propre. On note par $f \wedge g$ le plus long préfixe commun à f et à g.

Soient n un entier et f un mot de A^* ; on désigne par $|f|$ la longueur de f et, en supposant que n est inférieur ou égal à $|f|$, on note par f_n la n-ième lettre de f et par $f_{[n]}$ le préfixe de f de longueur n.

Rappelons la définition de la *famille des parties rationnelle d'un monoïde M* : c'est la plus petite famille de parties de M qui contient les parties finies et qui est fermée pour les opérations d'union (finie), de produit ($PQ = \{pq \mid p \in P, q \in Q\}$), et d'étoile $\left(P^* = \bigcup_{0}^{\infty} P^n\right)$. Nous utiliserons sans référence particuliére les propriétés des ensembles rationnels du monoïde libre : le complément, l'image, et l'image inverse par un homomorphisme d'un tel ensemble rationnel sont des ensembles rationnels (cf. [2, 3]). Enfin, une relation de X^* dans Y^* est dite rationnelle si son graphe est une partie rationnelle de $X^* \times Y^*$.

2. La transversale lexicographique

Supposons l'alphabet A ordonné par un *ordre total* que l'on note $\prec$; on en déduit un *ordre total* sur A* appelé *ordre lexicographique*, encore noté par $\prec$ et défini par :

$$\forall f, g \in A^*, \quad f \prec g \Leftrightarrow (f \leqslant g \quad \text{ou} \quad (f = uah \quad \text{et} \quad g = ubk \quad \text{et} \quad a \neq b, \quad a \prec b))$$

L'ordre lexicographique n'est pas un bon ordre : si $a \prec b$, la partie a^*b de A^* n'a pas de plus petit élément. Le résultat suivant fait partie du folklore (cf. [2], exercice III.5.1) :

PROPOSITION 1 : *La relation σ de A^* dans lui-même qui à chaque mot f associe l'ensemble des mots qui sont supérieurs à f dans l'ordre lexicographique, i. e.*

$$\sigma(f) = \{ g \mid f \prec g \},$$

est une relation rationnelle.

Preuve : Posons $D = \{ (a, a) \mid a \in A \}$ et $F = \{ (a, b) \mid a, b \in A, a \neq b, a \prec b \}$; on vérifie aisément à partir de la définition de l'ordre lexicographique que le graphe de σ est l'ensemble $D^*(1, A^+) + D^*F(A^*, A^*)$ ■

Soient A^* et X^* deux monoïdes libres, et $\theta : A^* \to X^*$ un homomorphisme ; la relation μ de A^* dans lui-même définie par

$$\mu(f) = \{ g \mid \theta(f) = \theta(g) \}$$

est une relation rationnelle puisque $\mu = \theta^{-1} \circ \theta$. Soit τ la relation de A^* dans lui-même, intersection des relations σ et μ :

$$\tau(f) = \{ g \mid \theta(f) = \theta(g) \quad \text{et} \quad f \prec g \}$$

Alors que l'intersection de deux relations rationnelles n'est pas, en général, une relation rationnelle (cf. [2, 3]), *la relation* τ, elle, *est rationnelle.* C'est cette propriété qui a déjà été annoncée avec le théorème 2 et dont la preuve, constructive et un peu technique, est reportée à la seconde partie de cet article. Voyons maintenant comment on en déduit que l'homomorphisme θ possède la propriété de transversale rationnelle.

Avec les notations précédentes on a d'abord un résultat évident :

LEMME 1 : *Soit L une partie quelconque de A^*. La partie $K = L - \tau(L)$ est égale à l'ensemble des éléments minimums, dans l'ordre lexicographique, dans l'intersection de chaque classe modulo θ avec L.* ■

Il faut noter que, puisque l'ordre lexicographique n'est pas un bon ordre, l'intersection de certaines classes modulo θ avec L peut ne pas contenir d'élément minimum.

Exemple 1 : $A=\{a, b\}$, $a \prec b$, $X=\{x\}$, $\theta(a)=1$, $\theta(b)=x$, et $L=a^*b$. L est inclus dans une seule classe modulo θ et n'a pas d'élément minimum. On vérifie que $\tau(a^nb)=\{a^mb \mid m<n\}$ et donc $L-\tau(L)=\emptyset$.

DEFINITION 3 : Soit L une partie de A^*. Si dans l'intersection de chaque classe modulo θ avec L il existe un plus petit élément dans l'ordre lexicographique, l'ensemble de ces éléments minimums est appelé *transversale lexicographique* de L pour θ.

COROLLAIRE 1 : *Soit R une partie rationnelle de A^*. Si la transversale lexicographique de R pour θ existe, elle est rationnelle.*

Puisque τ est une relation rationnelle, $\tau(R)$ est une partie rationnelle, et $R-\tau(R)$ aussi. D'après le lemme 1 ce dernier ensemble est précisément la transversale lexicographique de R si elle existe.

Si l'homomorphisme θ est continu, chaque classe modulo θ est finie et toute partie de A^* possède une transversale lexicographique. On en déduit ainsi immédiatement que *tout homomorphisme continu possède la propriété de transversale rationnelle.* Pour pouvoir traiter des homomorphismes non continus, qui font problème comme l'a montré l'exemple 1, on pose la définition suivante.

DÉFINITION 4 : Soit $\theta : A^* \to X^*$ un homomorphisme. Un ordre total sur A, et l'ordre lexicographique qui s'en déduit sur A^*, sont dits *adaptés à* θ si toute lettre dont l'image par θ vaut 1 est supérieure pour cet ordre à toute lettre dont l'image par θ est différente de 1.

On a alors le résultat suivant :

LEMME 2 : *Soit $\theta : A^* \to X^*$ un homomorphisme tel qu'il y a au plus une lettre de A dont l'image par θ vaut 1, et supposons choisi sur A^* un ordre lexicographique adapté à θ. Alors toute partie de A^* possède une transversale lexicographique pour θ.*

Preuve : Si θ n'envoie aucune lettre de A sur 1, θ est continu par définition et le lemme résulte de la remarque précédente. Sinon on pose $A=C\cup\{a\}$ avec $\theta(a)=1$. θ est le composé $\psi\circ\pi$ où π est la projection de A^* sur C^* et ψ un homomorphisme continu de C^* dans X^*.

Considérons d'abord deux mots f et g de A^* qui ont même image par π.

$$f=a^{n_0}b_1a^{n_1}b_2 \ldots b_ka^{n_k} \qquad \text{avec} \qquad b_i\in C$$
$$g=a^{m_0}b_1a^{m_1}b_2 \ldots b_ka^{m_k}$$

Puisque toute lettre b de C est inférieure à a dans l'ordre lexicographique par hypothèse, on a l'implication :

$$(1) \qquad i = \min\{ j \mid n_j \neq m_j \} \Rightarrow (n_i < m_i \Rightarrow f \prec g)$$

On va montrer, par l'absurde, qu'on ne peut avoir de suite infinie décroissante à l'intérieur d'une même classe modulo θ. Soit s une telle suite. L'image s par π est finie puisqu'elle est contenue dans une même classe modulo ψ : il existe une sous-suite infinie $s' = \{ f_i \}$ de s telle que tous les f_i ont la même image par π :

$$f_i = a^{n_{i,0}} b_1 a^{n_{i,1}} b_2 \ldots b_k a^{n_{i,k}} \qquad i, n_{ij} \in \mathbb{N}$$

La suite s' est décroissante ; l'implication (1) entraîne que la suite des entiers $n_{i,0}$ est aussi une suite décroissante, au sens large, et donc stationnaire à partir d'un certain rang. A partir de ce rang c'est la suite des entiers $n_{i,1}$ qui forme une suite décroissante donc stationnaire à partir d'un certain rang. On va ainsi, successivement, montrer que chacune des suites d'entiers $n_{i,j}$ est stationnaire : la suite s' ne saurait être infinie. ■

L'exemple 1 a montré que l'hypothèse de l'adaptation de l'ordre à l'homomorphisme est nécessaire. C'est la restriction sur le nombre de lettres dont l'image vaut 1 qui permet l'implication (1) ; elle est aussi nécessaire :

Exemple 2 : $A = \{ a, b, c \}$, $X = \{ x \}$, $\theta(a) = x$, et $\theta(b) = \theta(c) = 1$. Si $a \prec b \prec c$ la suite $b^n ca$ est une suite infinie décroissante ; si $a \prec c \prec b$ la suite $c^n ba$ est une suite infinie décroissante et, quel que soit l'ordre lexicographique adapté à θ sur A^* la partie $L = b^+ c^+ ba$ n'a pas de transversale lexicographique.

La preuve du théorème 1 est alors identique à la preuve originale dans [3]. Tout homomorphisme d'un monoïde libre dans un autre se décompose en le produit d'une projection et d'un homomorphisme continu. Toute projection se décompose en un produit de projections qui chacune n'envoie qu'une seule lettre sur le mot vide. Le théorème 1 découle alors du corollaire 1, du lemme 2, et de la propriété de composition que nous avons citée dans l'introduction et que nous prouvons maintenant pour la commodité du lecteur qui aurait égaré son exemplaire de [2] ou de [3].

LEMME 3 : *Soient* $\chi : A^* \to X^*$ *et* $\psi : X^* \to Y^*$ *deux homomorphismes qui possèdent la propriété de transversale rationnelle. Alors* $\psi \circ \chi$ *possède la propriété de transversale rationnelle.*

Preuve : Soit R une partie rationnelle de A^* ; $\chi(R)$ est rationnel et il existe une transversale rationnelle S de $\chi(R)$ pour ψ. Soit $U = \chi^{-1}(S) \cap R$; U est rationnel et il existe une transversale rationnelle T de U pour χ : T est une transversale (rationnelle) de R pour $\psi \circ \chi$. En effet

$$\psi \circ \chi(T) = \psi(\chi(U)) = \psi(S) = \psi(\chi(R))$$

et puisque χ est injectif sur T et ψ injectif sur $S = \chi(T)$, $\psi \circ \chi$ est injectif sur T. ■

Si on ne s'intéresse plus aux parties quelconques de A^* mais seulement à A^* tout entier, la propriété d'adaptation de l'ordre à l'homomorphisme permet d'établir :

PROPOSITION 2 : *Si $\theta : A^* \to X^*$ est un homomorphisme et si l'ordre lexicographique fixé sur A^* est adapté à θ, la transversale lexicographique de A^* pour θ existe (et donc est rationnelle).*

Preuve : Posons $\theta = \psi \circ \pi$ où ψ est continu et où $\pi : A^* \to C^*$ est une projection. Puisque l'ordre lexicographique est adapté à θ, pour tout mot f de A^*, $g = \pi(f)$ est inférieur à f. Soit C une classe modulo θ, $D = \pi(C)$ est une classe modulo ψ; D est fini et contenu dans C. Tout élément de C a un minorant dans D donc C contient un plus petit élément : le plus petit élément de D. ■

3. La transversale généalogique

Le problème rencontré à la section précédente provient de ce que l'ordre lexicographique n'est pas un bon ordre, et donc que l'on ne peut pas toujours assurer l'existence de la transversale lexicographique. Chercher si un *bon ordre* tout aussi « rationnel » que l'ordre lexicographique — c'est-à-dire qui satisfasse la proposition 1 — permet d'énoncer le théorème 2 procède de la curiosité la plus naturelle. On disposerait alors d'un moyen pour décrire une autre transversale rationnelle. Nous allons voir dans cette section que la réponse est négative, de bout en bout, pour l'ordre généalogique.

Supposons A^* encore ordonné lexicographiquement par $\prec$; on construit alors un autre ordre total sur A^*, appelé *ordre généalogique*, noté par $\prec\prec$, et défini par

$$\forall f, g \in A^* \qquad f \prec\prec g \Leftrightarrow |f| < |g| \qquad \text{ou} \qquad (|f| = |g| \quad \text{et} \quad f \prec g)$$

L'analogue de la proposition 1 est vraie pour l'ordre généalogique (cf. également [2], exercice III.5.1) :

PROPOSITION 3 : *La relation α de A^* dans lui-même qui à chaque mot f associe l'ensemble des mots qui sont supérieurs à f dans l'ordre généalogique, i. e.*

$$\alpha(f) = \{ g \mid f \prec\prec g \}$$

est une relation rationnelle.

Preuve : On vérifie aisément que le graphe de α est, avec les mêmes notations que dans la preuve de la proposition 1, l'ensemble $(A, A)^*(1, A^+) + D^*F(A, A)^*$. ■

L'ordre généalogique est un bon ordre ; on peut donc poser :

DEFINITION 5 : Soient $\theta : A^* \rightarrow E$ une application, et L une partie de A^*. L'ensemble des éléments minimums pour l'ordre généalogique de l'intersection de chaque classe modulo θ avec L est appelé *transversale généalogique* de L pour θ.

Soient $\theta : A^* \rightarrow X^*$ un homomorphisme et μ la relation $\theta^{-1} \circ \theta$. On notera ω la relation intersection des relations α et μ. On a pour ω la propriété équivalente au lemme 1, sans les problèmes d'existence :

LEMME 4 : *Soit L une partie quelconque de A^*. La partie $J = L - \omega(L)$ est la transversale généalogique de L pour θ.*

Fait 1 : *La relation ω n'est pas une relation rationnelle.*

En vertu du lemme 4, il suffit d'exhiber un ensemble rationnel dont la transversale généalogique n'est pas rationnelle et donc le fait 1 découle du fait 2 ci-dessous. Nous donnons néanmoins un exemple qui établit le fait 1 dans un cas où la transversale généalogique est rationnelle (cf. conjecture ci-dessous).

Exemple 3 : $A = \{ a, b, c \}$ $X = \{ x \}$ $\theta(a) = x^2$ $\theta(b) = x$ $\theta(c) = x^3$ et $a \prec b \prec c$.

L'ensemble $\omega((a^2)^*)$ n'est pas rationnel (ce qui n'empêche pas $(a^2)^*$ d'être sa propre transversale généalogique) car :

$$\begin{aligned}\omega((a^2)^*) \cap c^*b^* &= \{ c^k b^l \mid 3k + l = 4n \quad k + l \geqslant 2n \} \\ &= \{ c^k b^l \mid \ k \leqslant l \qquad 3k + l \equiv 0 \bmod. 4 \}\end{aligned}$$ ■

Fait 2 : *La transversale généalogique d'un ensemble rationnel n'est pas (toujours) rationnelle.*

L'exemple suivant établit ce fait dans le cas particulièrement simple où l'homomorphisme est une projection (dans ce cas la transversale généalogique de A^* tout entier est rationnelle).

Exemple 4 : $A = \{ a, b, c \}$ $B = \{ a, c \}$ $\pi : A^* \rightarrow B^*$ $R = a^*(bc)^* \cup (ab)^*c^*$ $\pi(\mathrm{R}) = a^*c^*$.

Pour chaque entier m et n on a

$$\pi^{-1}(a^m c^n) \cap R = \{ a^m(bc)^n, (ab)^m c^n \}$$

La transversale généalogique de R pour π est

$$T = \{ a^m(bc)^n \mid m \geqslant n \} \cup \{ (ab)^m c^n \mid m < n \}$$ ■

Fait 3 : La transversale généalogique de A^* n'est pas (toujours) rationnelle.

Ce fait implique logiquement les deux précédents ; sa preuve nécessite un exemple plus élaboré, c'est pourquoi nous avons préféré établir d'abord les faits 1 et 2 avec des exemples simples.

Exemple 5 : $A=\{a,b,c,d,e,f\}$ $X=\{x,y,z\}$ $\theta(a)=x$ $\theta(b)=yxyx$ $\theta(c)=xy$ $\theta(d)=yz$ $\theta(e)=zyzy$ $\theta(f)=z$.

Soit T la transversale généalogique de A^* et soit à déterminer l'ensemble $T\cap ab^*(d^2)^*d$. On a $\theta(ab^nd^{2m+1})=(xy)^{2n}xyz(yz)^{2m}$.

Puisque l'image d'aucune lettre de A ne contient le mot xyz en facteur, si $w\in\theta^{-1}((xy)^{2n}xyz(yz)^{2m})$ alors w se factorise en $w=uv$ et l'une des deux assertions suivantes est vérifiée :

(1) $\qquad \theta(u)=(xy)^{2n}x \quad$ et $\quad \theta(v)=(yz)^{2m+1}$

(2) $\qquad \theta(u)=(xy)^{2n+1} \quad$ et $\quad \theta(v)=z(yz)^{2m}$

Si (1) est vérifiée, alors $v=d^{2m+1}$ est le seul décodage possible et $u=ab^n$ est le décodage le plus court.

Si (2) est vérifiée, alors $u=c^{2n+1}$ est le seul décodage possible et $v=e^{2m}f$ est le décodage le plus court.

Ainsi ab^nd^{2m+1} appartient à T si $1+n+2m+1\leqslant 2n+1+m+1$ et donc

$$T\cap ab^*(d^2)^*d=\{ab^nd^{2m+1}\mid m\leqslant n\}. \qquad \blacksquare$$

Mentionnons enfin un problème ouvert ; en dépit du fait 1 mentionné ci-dessus, certains résultats partiels feraient plutôt pencher vers une réponse positive.

CONJECTURE : Soit θ un homomorphisme de A^* dans $\mathbb{N}$, le monoïde des entiers naturels. Alors la transversale généalogique de tout ensemble rationnel de A^* pour θ est rationnelle.

4. Les transversales d'Eilenberg

La preuve du théorème 1 donnée en [3] est constructive, tout comme celle présentée ici. Il reste à vérifier que ces deux preuves diffèrent non seulement par leur méthode mais aussi par leurs résultats, c'est-à-dire que les transversales construites dans l'un et l'autre cas sont en général différentes.

Plaçons-nous dans le cas simple d'un homomorphisme continu, donc dans un cas où la preuve présentée ici donne la transversale lexicographique. Il y a — au moins — deux manières classiques de décomposer un homomorphisme continu en le produit d'un homomorphisme injectif et d'une suite d'homomorphismes « élémentaires » ; nous allons les examiner sur un exemple. Soient

$$A = \{ a, b, c \} \qquad X = \{ x \}$$

et $\theta : A^* \to X^*$ défini par $\theta(a) = \theta(c) = x$ $\theta(b) = xx$.

On peut prendre d'abord $Y = A \cup X$, $\chi : A^* \to Y^*$ défini par $\chi(a) = ax$, $\chi(b) = bxx$, et $\chi(c) = cx$, et π_a, π_b, et π_c les projections de Y^* dans lui-même qui effacent respectivement les lettres a, b, et c, et laissent les autres lettres inchangées.

L'homomorphisme χ est injectif et θ est le produit de χ par un produit dans un ordre quelconque de π_a, π_b, et π_c.

Fixons $a \prec b \prec c$ dans A, et soit

$$R = \{ abc, bb, cab \}.$$

On a $\theta(R) = \{ xxxx \}$ et la transversale lexicographique de R pour θ est $\{ abc \}$. Si on décompose θ en $\pi_b \circ \pi_c \circ \pi_a \circ \chi$ ou $\pi_b \circ \pi_a \circ \pi_c \circ \chi$ la transversale calculée en [3] est $\{ cab \}$, et si l'on utilise l'une quelconque des quatre autres décompositions on obtient $\{ bb \}$.

On peut également prendre $Z = \{ x_a, x_b, x_c \}$, définir $\psi : A^* \to Z^*$ par $\psi(a) = x_a$, $\psi(b) = x_b x_b$, et $\psi(c) = x_c$, et considérer les homomorphismes $\tau_{i,j}$ de Z^* dans lui-même — avec i et j dans A, i différent de j — qui envoient x_j sur x_i et laissent x_i et la troisième lettre inchangées. Remarquons qu'il nous faut distinguer $\tau_{i,j}$ de $\tau_{j,i}$ puisque les ordres lexicographiques qu'ils induisent sur Z^* (dans la preuve de [3]) sont différents. Il y a 12 décompositions différentes possibles de θ en un produit de ψ (qui est injectif) par un produit $\tau_{i,j} \circ \tau_{i,l}$ (en sous-entendant l'homomorphisme qui envoie x_i sur x).

Soit $R' = \{ b, ac, ba, bc, caa \}$; on a $\theta(R') = \{ xx, xxx \}$ et la transversale lexicographique de R' pour θ est, en supposant toujours $a \prec b \prec c$, $\{ ac, ba \}$. Si l'on décompose θ en $\tau_{b,a} \circ \tau_{b,c} \circ \psi$, $\tau_{c,a} \circ \tau_{c,b} \circ \psi$, ou $\tau_{b,c} \circ \tau_{c,a} \circ \psi$ on obtient $\{ b, bc \}$ comme transversale en suivant [3], si l'on choisit $\tau_{b,a} \circ \tau_{a,c} \circ \psi$, $\tau_{a,c} \circ \tau_{a,b} \circ \psi$, ou $\tau_{b,c} \circ \tau_{b,a} \circ \psi$ on obtient $\{ b, ba \}$ et, dans les 6 autres cas, on obtient $\{ ac, caa \}$.

B. PREUVE DU THÉORÈME 2

La démonstration du théorème 2 est constructive. Nous rappelons d'abord la définition des objets que nous allons utiliser pour cette construction : les transducteurs, et quelques notations qui s'y rapportent.

5. Transducteurs

Soient M un monoïde et P un ensemble, l'ensemble $\mathscr{P}(M)$ muni de l'union ensembliste et du produit induit par la multiplication de M est un semi-anneau. L'ensemble des matrices carrées de dimension P, c'est-à-dire les matrices dont les lignes et les colonnes sont indexées par P, et à coefficients dans $\mathscr{P}(M)$ est donc un monoïde, noté $\mathscr{P}(M)^{\mathrm{P}\times\mathrm{P}}$. Si X^* est un monoïde libre, on appelle *transducteur défini sur X^* et sur l'ensemble d'états P, et à valeur dans M* tout triple (λ, μ, ν) où μ est un homomorphisme de X^* dans $\mathscr{P}(M)^{\mathrm{P}\times\mathrm{P}}$ et où λ et ν sont respectivement un vecteur-ligne et un vecteur-colonne de dimension P, dont les coordonnées sont prises dans $\mathscr{P}(M)$. On dira aussi que (λ, μ, ν) est un transducteur de X^* dans M, de dimension P.

Si p et q sont deux éléments de P on note $\mu(f)_{p,q}$ le coefficient (p, q) de la matrice $\mu(f)$, et λ_p la coordonnée p du vecteur λ et, en espérant que la lecture en sera clarifiée, on indique par un point toutes les multiplications matricielles, pour les distinguer des multiplications dans X^* et dans M, notées par simple juxtaposition. L'ensemble vide de M, zéro du semi-anneau $\mathscr{P}(M)$ est noté 0.

Une relation τ de X^* dans M est dite *réalisée par un transducteur* (λ, μ, ν) si pour tout f dans X^*

$$\tau(f)=\lambda\cdot\mu(f)\cdot\nu$$

Un transducteur (λ, μ, ν) défini sur X^* et sur l'ensemble d'états P, et à valeur dans M est *rationnel* si P est fini et si pour tout x dans X les coefficients de $\mu(x)$, et ceux de λ et ν, sont des parties rationnelles de M.

THÉORÈME (Kleene-Schützenberger) : *Une relation τ de X^* dans M est rationnelle si, et seulement si, il existe un transducteur rationnel de X^* dans M qui réalise τ.*

Par abus de langage on dira souvent que l'homomorphisme μ lui-même est un transducteur, et que la relation τ de X^* dans M est réalisée par le transducteur μ au coefficient (p, q) si pour tout f dans X^*

$$\tau(f)=\mu(f)_{p,q}.$$

Un transducteur μ de dimension P est *(p, q)-normalisé* si pour tout x dans X la colonne p, et la ligne q de $\mu(x)$ sont identiquement nulles, et il en est donc de même pour la colonne p et la ligne q de $\mu(f)$ pour tout f dans X^*. Si une relation τ est réalisée au coefficient (p, q) par un transducteur μ de dimension P

et (p, q)-normalisé alors la relation τ^*(1) est réalisée au coefficient (p, p) par le transducteur μ' de dimension $P\backslash\{q\}$ obtenu en supprimant dans chaque matrice $\mu(x)$ la ligne q (qui est nulle) et en remplaçant la colonne p (qui est nulle) par la colonne q de la même matrice $\mu(x)$.

Si θ est un homomorphisme de A^* dans X^* et si τ est une relation de X^* dans M réalisée par (λ, μ, ν), alors la relation $\tau \circ \theta$ de A^* dans M est réalisée par (λ, μ', ν) où, pour chaque lettre a de A $\mu'(a) = \mu(\theta(a))$.

Dans toute la suite, le monoïde M sera en fait lui-même un monoïde libre.

6. Le décodeur déployé

Reprenons les notations de la section 2. Soient $\theta : A^* \rightarrow X^*$ un homomorphisme et $\prec$ un ordre lexicographique sur X^*, on note $\mu = \theta^{-1} \circ \theta$ et τ la relation de X^* dans lui-même définie par

$$\tau(f) = \{ g \mid \theta(f) = \theta(g) \quad \text{et} \quad f \prec g \}.$$

Il s'agit de montrer que τ est une relation rationnelle et nous allons le faire en construisant explicitement un transducteur qui réalise τ. Nous allons pour cela partir d'un transducteur spécial qui réalise μ : *le décodeur déployé.*

1) La construction d'un transducteur qui réalise μ fait partie, bien entendu, du folklore (2). Elle s'obtient naturellement à partir d'un transducteur qui réalise $\theta^{-1} : X^* \rightarrow A^*$. Le graphe de θ^{-1} est $(\sum_{a \in A} (\theta(a), a))^*$ et un transducteur de θ^{-1} s'obtient donc à partir d'un transducteur normalisé de la relation ψ dont le graphe est $\sum_{a \in A} (\theta(a), a)$. Voici, en guise d'introduction, la construction classique.

Soit P l'ensemble des préfixes propres de la partie $Y = \theta(A)$ de X^*

$$P = \{ p \in X^* \mid \exists a \in A \ p < \theta(a) \}$$

et, pour chaque y dans X^* soit $B(y)$ l'ensemble des lettres de A dont l'image par θ vaut y.

$$B(y) = \{ a \in A \mid \theta(a) = y \} = \theta^{-1}(y) \cap A$$

Supposons d'abord θ continu. Le transducteur normalisé α défini sur X^* et sur l'ensemble d'états $P \cup \{ \omega \}$ par (3)

$$\alpha(x)_{p,p'} = 1 \qquad \text{si} \quad px = p'$$
$$\alpha(x)_{p,\omega} = B(px)$$

(1) Nous notons ici par τ^* la relation dont le graphe est l'étoile du graphe de τ.
(2) Cf. [3], p. 142, par exemple.
(3) Nous ne décrivons explicitement que les coefficients non nuls des transducteurs. Par ailleurs λ désigne, dans toute la suite, le vecteur ligne $(1, 0, 0, \ldots, 0)$ implicitement toujours choisi à la dimension adéquate.

réalise, au coefficient $(1, \omega)$, la relation ψ ; et le transducteur β défini sur X^* et sur l'ensemble d'états P par :

$$\begin{aligned} \beta(x)_{p,p'} &= 1 && \text{si} \quad px = p' \\ &= B(px) && \text{si} \quad p' = 1 \end{aligned}$$

réalise, au coefficient $(1, 1)$, la relation θ^{-1}. Si maintenant θ n'est pas continu, posons $I = B(1)$ et C le complémentaire de I dans A. La restriction de θ à C^* est continue. On a :

$$\Big[\sum_{a\in A} (\theta(a), a)\Big]^* = \Big[(1, I)^* \sum_{a\in C} (\theta(a), a)\Big]^*(1, I)^* = \Big[\sum_{a\in C} (\theta(a), I^*a)\Big]^*(1, I^*)$$

c'est-à-dire qu'on obtient un transducteur de θ^{-1} à partir d'un transducteur de sa restriction à C^*, construit comme ci-dessus, dans lequel on substitue à chaque lettre a de C le langage I^*a, et en multipliant le résultat par I^* :

$$\begin{aligned} \beta(x)_{p,p'} &= 1 && \text{si} \quad px = p' \\ &= I^*B(px) && \text{si} \quad p' = 1 \\ \xi_p &= I^* && \text{si} \quad p = 1 \end{aligned}$$

Le transducteur (λ, β, ξ) réalise θ^{-1} ; on dit que c'est un *décodeur* de θ. Enfin le transducteur (λ, γ, ζ) où, pour chaque lettre a de A, on a $\gamma(a) = \beta(\theta(a))$, réalise la relation μ.

Exemple : $A = \{ a, b, c, d, e, i, j \}$ $X = \{ x, y \}$

$$\theta(a) = xy, \quad \theta(b) = yx, \quad \theta(c) = x, \quad \theta(d) = y, \quad \theta(e) = xy, \quad \theta(i) = \theta(j) = 1.$$

On a

$$C = \{ a, b, c, d, e \} \quad I = \{ i, j \}$$
$$Y = \theta(A) = \{ 1, x, y, xy, yx \} \quad P = \{ 1, x, y \}$$
$$B(x) = c \quad B(y) = d \quad B(xy) = \{ a, e \} \quad B(yx) = b$$

$$\alpha(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \alpha(y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & 0 & a+e \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où les lignes et les colonnes sont indexées par $(1, x, y, \omega)$ dans cet ordre. Il vient ensuite

$$\beta(x) = \begin{pmatrix} I^*c & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ I^*b & 0 & 0 \end{pmatrix} = \gamma(c) \qquad \beta(y) = \begin{pmatrix} I^*d & 0 & 1 \\ I^*(a+e) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \gamma(d)$$

$$\beta(xy) = \begin{pmatrix} I^*cI^*d + I^*(a+e) & 0 & I^*c \\ 0 & 0 & 0 \\ I^*bI^*d & 0 & I^*b \end{pmatrix} = \gamma(a) = \gamma(e)$$

$$\beta(yx) = \begin{pmatrix} I^*dI^*c + I^*b & I^*d & 0 \\ I^*(a+e)I^*c & I^*(a+e) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \gamma(b)$$

où les lignes et les colonnes sont indexées par $(1, x, y)$.

2) La construction d'un transducteur qui réalise τ nécessite un autre décodeur de θ, construit sur un plus grand nombre d'états pour permettre de distinguer, pour chaque préfixe p de $\theta(A)$, la lettre de A que l'on est en train de décoder.

On suppose de nouveau que θ est continu et on reprend la construction d'un transducteur qui réalise ψ. Soit Q l'ensemble défini par :

$$Q = 1 \cup \{ (p, a) \mid p \in X^+, a \in A \ p < \theta(a) \}$$

et soit δ le transducteur défini sur X^* et sur l'ensemble d'états $Q \cup \{ \omega \}$ par

(1)	$\delta(x)_{q,q'} = 1$	si	$q = 1$	et	$q' = (x, a)$
(2)	$= 1$	si	$q = (p, a)$	et	$q' = (px, a)$
(3)	$\delta(x)_{q,\omega} = a$	si	$q = (p, a)$	et	$px = \theta(a)$
(4)	$\delta(x)_{1,\omega} = B(x)$				

PROPRIÉTÉ 1 : *Le transducteur* δ *réalise, au coefficient* $(1, \omega)$ *la relation dont le graphe est* $\sum_{a \in A} (\theta(a), a)$.

Si w est un mot de X^* tel que $\delta(w)_{1,\omega} \neq 0$ sa longueur est supérieure ou égale à 1. Si $w = x$ appartient à X alors, d'après (4), $\delta(w)_{1,\omega} = B(w)$. Sinon $w = vx$ et il existe un état q de Q tel que $\delta(v)_{1,q} \neq 0$ et $\delta(x)_{q,\omega} \neq 0$; de cette dernière relation, et de (3) qui donne l'unique possibilité, on déduit qu'il existe une lettre a de A telle que $q = (p, a)$, $px = \theta(a)$, et $\delta(x)_{(p,a),\omega} = a$; enfin on vérifie, par récurrence sur la longueur de v, que $\delta(v)_{1,(p,a)} \neq 0$ implique $p = v$ et $\delta(v)_{1,(v,a)} = 1$. Ainsi $\theta(w) = a$ et $\delta(w)_{1,\omega} \subset B(w)$.

Inversement supposons que la lettre a appartienne à $B(w)$. Comme θ est continu, la longueur de w est supérieure ou égale à 1 ; si elle est égale à 1 on a déjà vu que a appartient à $\delta(w)_{1,\omega}$. Si $w=vx$ on a $\delta(x)_{(v,a),}\ =a$ d'après (3) et, d'après (1) et (2) on a :

$$\delta(v_1)_{1,(v_1,a)} \cdot \prod_{i=2}^{i=|v|} \delta(v_i)_{(v_{[i-1]},a),(v_{[i]},a)} \cdot \delta(x)_{(v,a)} = a \in \delta(w)_{1,\omega} \quad \blacksquare$$

La construction standard pour obtenir le transducteur qui réalise θ^{-1} à partir de celui qui réalise δ, puis la même substitution qu'au § 1 pour étendre la construction au cas où θ n'est pas continu donne le transducteur $(\lambda, \varepsilon, \zeta)$:

(5)	$\varepsilon(x)_{q,q'}=1$	si $q=1$	et	$q'=(x, a)$
(6)	$=1$	si $q=(p, a)$	et	$q'=(px, a)$
(7)	$=I^*a$	si $q=(p, a)$, $px=\theta(a)$	et	$q'=1$
(8)	$=I^*B(x)$	si $q=q'=1$		
	$\zeta_q=I^*$	si $q=1$		

En vue de développements ultérieurs, nous modifions légèrement le transducteur ε pour obtenir le transducteur η :

(9)	$\eta(x)_{q,q'}=I^*$	si $q=1$	et	$q'=(x, a)$
(10)	$=1$	si $q=(p, a)$	et	$q'=(px, a)$
(11)	$=a$	si $q=(p, a)$, $px=\theta(a)$	et	$q'=1$
(12)	$=I^*B(x)$	si $q=q'=1$		

Cette modification ne change rien à l'affaire car :

PROPRIÉTÉ 2 : $\forall w \in X^*\ \eta(w)_{1,1}=\varepsilon(w)_{1,1}$.

Ainsi le transducteur (λ, η, ζ) réalise θ^{-1} ; nous l'appelons le *décodeur déployé* de θ. Le transducteur (λ, κ, ζ) où, pour chaque lettre a de A, on a $\kappa(a)=\eta(\theta(a))$ réalise μ. Autrement dit on a la relation :

(13) $$\forall f, g \in A^* \quad \theta(f)=\theta(g) \Leftrightarrow f \in \kappa(g)_{1,1} I^*$$

Avant toute preuve, poursuivons l'exemple précédent.

$$Q=1 \cup \{ (x, a), (x, e), (y, b) \}$$

et

$$\delta(x)=\begin{pmatrix}0&1&1&0&c\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&b\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\qquad \delta(y)=\begin{pmatrix}0&0&0&1&d\\0&0&0&0&a\\0&0&0&0&e\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

où les lignes et les colonnes sont indexées par $(1, (x, a), (x, e), (y, b), \omega)$.

$$\varepsilon(x)=\begin{pmatrix}I^*c&1&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\I^*b&0&0&0\end{pmatrix}\qquad \varepsilon(y)=\begin{pmatrix}I^*d&0&0&1\\I^*a&0&0&0\\I^*e&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\eta(x)=\begin{pmatrix}I^*c&I^*&I^*&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\b&0&0&0\end{pmatrix}=\kappa(c)\qquad \eta(y)=\begin{pmatrix}I^*d&0&0&I^*\\a&0&0&0\\e&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}=\kappa(d)$$

$$\eta(xy)=\begin{pmatrix}I^*cI^*d+I^*(a+e)&0&0&I^*cI^*\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\bI^*d&0&0&bI^*\end{pmatrix}=\kappa(a)=\kappa(e)$$

$$\eta(yx)=\begin{pmatrix}I^*dI^*c+I^*b&I^*dI^*&I^*dI^*&0\\aI^*c&aI^*&aI^*&0\\eI^*c&eI^*&eI^*&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}=\kappa(b)$$

où les lignes et les colonnes sont indexées par $(1, (x, a), (x, e), (y, b))$.

Pour prouver la propriété 2, on établit d'abord les propriétés 3 et 4.

PROPRIÉTÉ 3 : $\eta(w)_{(p,a),1}=a\eta(v)_{1,1}$ *avec* $w=uv$.

Preuve : Soit u le plus petit facteur gauche de w tel que $\eta(u)_{(p,a),1}\neq 0$. Alors

(14) $$\eta(u)_{(p,a),1}=a \quad \text{et} \quad \eta(u)_{(p,a),q}=0 \quad \text{si} \quad q\neq 1$$

L'assertion (14) se montre par récurrence sur la longueur de u : d'après (11) elle est vraie si $|u|=1$. Posons $u=xu'$; on a

(15) $$\eta(xu')_{(p,a),q}=\sum_{q'\in Q}\eta(x)_{(p,a),q'}\eta(u')_{q',1}\quad \forall q\in Q$$

D'après l'hypothèse de minimalité de u, $\eta(x)_{(p,a),1}=0$, et, d'après (10) la somme dans (15) se réduit au seul terme

$$\eta(x)_{(p,a),(px,a)}\eta(u')_{(px,a),q}=\eta(u')_{(px,a),q}$$

d'où la récurrence.

Maintenant si $w=uv$ on a

$$\eta(w)_{(p,a),1}=\sum_{q\in Q}\eta(u)_{(p,a),q}\eta(v)_{q,1}=a\eta(v)_{1,1} \quad \blacksquare$$

Informellement, intuitivement, on peut exprimer la propriété 3 en disant qu'après chaque départ de l'état 1, et jusqu'au retour suivant à cet état, le transducteur η est déterministe.

PROPRIÉTÉ 4 : *$\varepsilon(w)_{(p,a),1}=I^*a\varepsilon(v)_{1,1}$ avec $w=uv$.*

La preuve de la propriété 4 est identique à celle de la propriété 3. $\blacksquare$

Preuve de la propriété 2 : par récurrence sur la longueur de w. Les assertions (8) et (12) montrent que la propriété est vraie si $w\in X$. Posons $w=xw'$; il vient

$$\eta(w)_{1,1}=\eta(x)_{1,1}\eta(w')_{1,1}+\sum_{(x,a)\in Q}\eta(x)_{1,(x,a)}\eta(w')_{(x,a),1}.$$

L'hypothèse de récurrence, les assertions (5) et (9) ,et les propriétés 3 et 4 permettent d'écrire :

$$\eta(w)_{1,1}=\varepsilon(x)_{1,1}\varepsilon(w')_{1,1}+\sum_{(x,a)\in Q}I^*a\varepsilon(v)_{1,1}=\varepsilon(w)_{1,1} \quad \blacksquare$$

Conséquence immédiate de la propriété 3, on a :

PROPRIÉTÉ 5 : *Si $g\in\kappa(f)_{(p,a),1}$ alors $g=ah$.*

Montrons enfin une dernière propriété du transducteur κ :

PROPRIÉTÉ 6 : *Si $g\in\kappa(a)_{1,q}$, avec $a\in A$, alors le mot ea, avec $e\in I^*$, n'est facteur gauche de g que si $g=ea$ et $q=1$.*

Soit $w=\theta(a)$ et $\kappa(a)_{1,q}=\eta(w)_{1,q}$. Si $w=x$ appartient à X alors (12) énonce la propriété. Si $w=xw'$ alors

$$\eta(xw')_{1,q}=\eta(x)_{1,1}\eta(w)_{1,q}+I^*\eta(w')_{(x,a),q}+\sum_{\substack{(x,b)\in Q\\ b\neq a}}I^*\eta(w')_{(x,b),q} \tag{16}$$

La lettre a n'appartient pas à $B(x)$ et donc aucun mot ea, avec e dans I^* n'est facteur gauche d'un élément du premier terme de la somme (16). D'après la propriété 3 un tel mot ne peut être non plus facteur gauche d'un élément du troisième terme de la somme (16). Si g appartient au second terme de (16) alors $g=eah$, toujours d'après la propriété 3 ; mais il existe alors une factorisation $w=xuv$ telle que $ea\in\eta(xu)_{1,1}$ et $h\in\eta(v)_{1,q}$. La définition de η implique que $\theta(ea)=\theta(a)=xu$ d'où $v=1_{X^*}$, $h=1_{A^*}$, et $q=1$. ■

7. Le transducteur pour un ordre adapté

On en vient à la construction du transducteur qui réalise τ. Avant de traiter le cas général nous supposons que l'ordre lexicographique $\prec$ fixé sur A^* est *adapté* à θ, c'est-à-dire que

$$\forall a, b\in A \qquad (\theta(a)\neq 1 \quad \text{et} \quad \theta(b)=1) \Rightarrow a\prec b$$

En particulier si θ est continu n'importe quel ordre sur A lui est adapté. Si θ n'est pas continu, on note $A=I+C$ comme en 6.1. On note aussi $I_a=\{\, b\in I \mid a\prec b\,\}$; si a est dans C, $I_a=I$ puisque $\prec$ est adapté à θ.

Soit (λ, π, ζ) le transducteur construit sur A^* et l'ensemble d'états $\{\,\varepsilon\,\}\cup Q$, de la manière suivante :

$$
\begin{array}{lllll}
(17) & \pi(a)_{\varepsilon,\varepsilon} = a & & & \\
(18) & \pi(a)_{q,\varepsilon} = 0 & \forall q\in Q & & \\
(19) & \pi(a)_{\varepsilon,q} = I^* & \text{si} \quad \kappa(a)_{1,q}=I^*, & q=(p,b), \quad \text{et} & a\prec b \\
(20) & \phantom{\pi(a)_{\varepsilon,q}} = I^+ & \text{si} \quad \kappa(a)_{1,q}=I^*, & q=(p,b), \quad \text{et} & b\prec a \\
(21)^{(1)} & \phantom{\pi(a)_{\varepsilon,q}} = I_a & \text{si} \quad \kappa(a)_{1,q}=1 \quad \text{et} & q=1 & \\
(22) & \phantom{\pi(a)_{\varepsilon,q}} = \{\, d \mid d\in A^+, d\in\kappa(a)_{1,q} \ \text{et} \ a\prec d\,\} & \text{sinon.} & & \\
(23) & \pi(a)_{q,q'} = \kappa(a)_{q,q'} & \forall q, q'\in Q. & & \\
 & \xi_\varepsilon = I^+ & & & \\
 & \xi_q = I^* & \text{si} \quad q=1. & &
\end{array}
$$

Propriété 7 : *Le transducteur (λ, π, ζ) réalise la relation τ.*

C'est-à-dire, de façon équivalente mais plus commode pour le traitement

$$\forall f\in A^* \quad \tau(f)=\pi(f)_{\varepsilon,\varepsilon}I^+ + \pi(f)_{\varepsilon,1}I^* \tag{24}$$

Reprenons d'abord notre exemple précédent, en supposant

$$a\prec b\prec c\prec d\prec e\prec i\prec j$$

[1] Ce cas se produit quand a appartient à I, puisque $\eta(1_{X^*})$ est égal à la matrice identité.

D'après (18) et (23) il suffit de décrire la ligne d'index ε des matrices $\pi(a)$, $\pi(b)$, etc., ligne indexée par $(\varepsilon, 1, (x, a), (x, e), (y, b))$.

$$
\begin{array}{lccccc}
\pi(a)_{\varepsilon,.} = a & I^*cI^*d+I^+a+I^*e & 0 & 0 & I^*cI^* \\
\pi(b)_{\varepsilon,.} = b & I^*dI^*c+I^+b & I^*dI^* & I^*dI^* & 0 \\
\pi(c)_{\varepsilon,.} = c & I^+c & I^+ & I^* & 0 \\
\pi(d)_{\varepsilon,.} = d & I^+d & 0 & 0 & I^* \\
\pi(e)_{\varepsilon,.} = e & I^+cI^*d + I^+(a+e) & 0 & 0 & I^+cI^* \\
\pi(i)_{\varepsilon,.} = i & j & 0 & 0 & 0 \\
\pi(j)_{\varepsilon,.} = j & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}
$$

Preuve : De (17) et (18) on déduit que, pour tout f dans A^*

(25) $$\pi(f)_{\varepsilon,\varepsilon} = f$$

De (18) et (23) on déduit que, pour tout f dans A^*

(26) $$\pi(f)_{q,q'} = \kappa(f)_{q,q'} \quad \forall q, q' \in Q$$

De (25) on déduit la suite d'équivalences :

(27) $$g \in \pi(f)_{\varepsilon,\varepsilon} I^+ \Leftrightarrow g \in f I^+ \Leftrightarrow (g = fu,\ u \in A^+, \text{ et } \theta(f) = \theta(g))$$

Soient f et g deux mots de A^* tels que $g \in \pi(f)_{\varepsilon,1}$. Il existe une factorisation $f = hak$ telle que

$$g \in \pi(h)_{\varepsilon,\varepsilon} \pi(a)_{\varepsilon,q} \pi(k)_{q,1}$$

Il faut distinguer 4 cas suivant que $a \in I$, et $\pi(a)_{\varepsilon,q}$ est donné par (21), ou que $a \in C$, et que $\pi(a)_{\varepsilon,q}$ est donné par (19), (20) ou (22).

Cas 1 : $a \in I$. D'après (21), $q = 1$ et $g = hbv$ avec $b \in I_a$ et $v \in \kappa(k)_{1,1}$. Puisque $\theta(a) = \theta(b) = 1$ on a

$$\theta(g) = \theta(h)\theta(v) = \theta(h)\theta(k) = \theta(f)$$

De plus comme $a \prec b$, $h = f \wedge g$ et $f \prec g$.

Cas 2 : $\pi(a)_{\varepsilon,q} = I^*$. Alors $\kappa(a)_{1,q} = I^*$ aussi et $g = hev$ avec $e \in I^*$ et $ev \in \kappa(ak)_{1,1}$; ainsi $\theta(f) = \theta(g)$. Mais on a aussi $v \in \kappa(k)_{q,1}$ avec $q = (p, b)$ et $a \prec b$ et de la propriété 5 on déduit que $v = bv'$.

Si $e = 1_{A^*}$, il s'ensuit de $a \prec b$ que $h = f \wedge g$ et $f \prec g$.

Si $e \in I^+$, il s'ensuit de ce que $a \notin I$ que $h = f \wedge g$ et de ce que l'ordre $\prec$ est adapté à θ que $f \prec g$.

Cas 3 : $\pi(a)_{\varepsilon,q} = I^+$. Alors $\kappa(a)_{1,q} = I^*$, $g = hev$ et on est ramené au cas précédent avec $e \in I^+$.

Cas 4 : $g=hdv$ avec $d\in\kappa(a)_{1,q}$, $d\in A^+$, $a\prec d$, et $v\in\kappa(k)_{q,1}$, la lettre a n'est pas facteur gauche de d puisque la condition $a\prec d$ exclut l'égalité $a=d$ et c'est la seule possibilité laissée par la propriété 6. Ainsi h est encore le plus long facteur gauche commun à f et g et $f\prec g$; enfin, comme $dv\in\kappa(ak)_{1,1}$, on a $\theta(f)=\theta(g)$ et on a montré l'inclusion de la droite vers la gauche dans l'égalité (24).

Réciproquement soient f et g deux mots de A^* tels que $g\in\tau(f)$. Le cas où f est un facteur gauche de g est réglé par la suite d'équivalences (27). Soit donc $h=f\wedge g$. On a

$$f=hak,\quad g=hbv \qquad \text{avec} \qquad a\prec b \qquad \text{et} \qquad bv\in\kappa(ak)_{1,1}I^*$$

puisque $\theta(bv)=\theta(ak)$ et en vertu de (13).

Si $a\in I$, et en vertu de l'hypothèse que l'ordre $\prec$ est adapté à θ, $b\in I$ aussi. On a $b\in I_a=\pi(a)_{\varepsilon,1}$; $v\in\kappa(k)_{1,1}I$ et $g\in\pi(f)_{\varepsilon,1}I$.

Supposons maintenant que $a\in C$ et soit q l'état de Q tel que

$$bv\in\kappa(a)_{1,q}\kappa(k)_{q,1}I^*$$

Soit e le plus long facteur gauche de bv appartenant à I^* et soit $bv=ecv'$. Il faut alors distinguer 2 cas (5-6) (qui correspondent au cas où $\theta(c)$ est un facteur gauche de $\theta(a)$ et *vice-versa*).

Cas 5 : ec est facteur gauche d'un mot d de $\kappa(a)_{1,q}$ tel que $bv\in d\kappa(k)_{q,1}I^*$. Comme $f\prec g$, $a\prec ec$ et donc $a\prec d$ puisque $a\neq ec$. Ainsi $d\in\pi(a)_{\varepsilon,q}$ et $g\in\pi(f)_{\varepsilon,1}I^*$.

Cas 6 : $q=(p,c)$ et $\kappa(a)_{1,(p,c)}=I^*$. Là encore, de deux choses l'une : si $e=1_{A^*}$ alors $c=b$ et $a\prec c$. Alors $1_{A^*}\in\pi(a)_{1,(p,c)}$ et $cv\in\kappa(k)_{(p,c),1}I^*$: $g\in\pi(f)_{\varepsilon,1}I^*$. Si $e\in I^+$ alors $e\in\pi(a)_{1,(p,c)}$ et, comme ci-dessus, $g\in\pi(f)_{\varepsilon,1}I^*$. ■

On a ainsi achevé la preuve de la propriété 7, et par là celle du théorème 2 dans le cas où l'ordre lexicographique est adapté à l'homomorphisme θ. Cela est suffisant pour établir le théorème 1, puisque dans ce cas l'ordre n'est pas fixé *a priori* mais est seulement un moyen pour construire une transversale. Il reste à établir le théorème 2 dans sa généralité.

8. Le transducteur pour un ordre quelconque

Au cours de la preuve précédente nous avons relevé les points où intervient l'hypothèse que l'ordre $\prec$ est adapté à θ. Dans le cas général il n'est plus vrai que, partant d'un mot f de A^*, on obtienne un mot g supérieur dans l'ordre lexicographique quand on intercale devant une lettre de f appartenant à C un mot de I^+ et, inversement, qu'on obtienne un mot g inférieur dans l'ordre lexicographique quand on efface dans f une lettre de I qui précède une lettre de C. De la même manière que, dans la construction précédente, on a distingué pour chaque préfixe de $\theta(A)$ un état différent suivant la lettre qu'on est en train de décoder, on va, pour construire un transducteur qui réalise τ quand l'ordre est quelconque, créer un état supplémentaire pour chaque lettre de A qui représente le préfixe de longueur zéro associé à la lettre que l'on *va* décoder.

Quand l'ordre n'est plus adapté il faut donc *redéployer* le décodeur de θ, ce que nous allons faire maintenant [1].

Soit R l'ensemble défini par $R=Q\cup\{(1,a)\mid a\in C\}$. Soit (λ, η', ζ) le transducteur défini sur X^* et l'ensemble d'états R par :

$$\eta'(x)_{r,r'}=\eta(x)_{r,r'} \quad \text{si} \quad r\in Q \quad \text{et} \quad r'\in Q \tag{28}$$

$$=1 \quad \text{si} \quad r=(1,a) \quad \text{et} \quad r'=(x,a) \tag{29}$$

et soit $(\lambda, \kappa', \zeta)$ le transducteur sur A^* défini par $\kappa'(a)=\eta'(\theta(a))$. De ce que les colonnes $\eta'(x)_{.,r}$ avec $r\notin Q$ sont identiquement nulles on déduit que, pour tout w dans X^*, $\eta'(w)_{1,1}=\eta(w)_{1,1}$ et donc que (λ, η', ζ) réalise θ^{-1}, et $(\lambda, \kappa', \zeta)$ réalise μ. On établit de même immédiatement que les propriétés 3, 5 et 6 sont encore vérifiées par η' et κ' respectivement.

PROPRIÉTÉ 8 : *Si $av\in\kappa(f)_{1,1}$ avec $a\in C$ alors $av\in\kappa(f)_{(1,a),1}$.*

Preuve : On vérifie d'abord, par récurrence sur la longueur de p, préfixe propre de $\theta(a)$, grâce à (29) et à (10) que

$$\eta'(p)_{(1,a),r}=1 \quad \text{si} \quad r=(pa)$$
$$=0 \quad \text{sinon}$$

et ainsi, grâce à (11), que

$$\eta'(\theta(a))_{(1,a),r}=a \quad \text{si} \quad r=1$$
$$=0 \quad \text{sinon}$$

Si $av\in\kappa'(k)_{1,1}$ on a $\theta(k)=\theta(av)=\theta(a)\theta(v)$ et

$$av\in\eta'(\theta(a))_{(1,a),1}\eta'(\theta(v))_{1,1}=\kappa'(k)_{(1,a),1}$$ ■

Soit (λ, π', ζ) le transducteur construit sur A^* et l'ensemble d'états $\{\varepsilon\}\cup R$ de la manière suivante :

$$\pi'(a)_{\varepsilon,\varepsilon}=a \qquad \forall a\in A$$
$$\pi'(a)_{r,\varepsilon}=0 \qquad \forall r\in R$$

Si $a\in I$

$$\pi(a)_{\varepsilon,r}=I_a \quad \text{si} \quad r=1 \tag{30}$$

$$=1 \quad \text{si} \quad r=(1,b) \quad \text{et} \quad a\prec b \tag{31}$$

[1] Qu'on ne dise plus que les idées de Madame l'ex-Ministre des Universités n'ont pas trouvé un écho favorable chez les universitaires ! (Publié postérieurement, cet article a été écrit avant le 11 mai 1981. *N. d. A.*).

Si $a \in C$

$$\pi'(a)_{\varepsilon,r} = I_a I^* + 1_{A^*} \quad \text{si} \quad \kappa'(a)_{1,r} = I^*, \quad r=(p,b), \quad \text{et} \quad a \prec b \tag{32}$$

$$= I_a I^* \quad \text{si} \quad \kappa'(a)_{1,r} = I^*, \quad r=(p,b), \quad \text{et} \quad b \prec a \tag{33}$$

$$= \{ d \mid d \in A^+, d \in \kappa'(a)_{1,r} \quad \text{et} \quad a \prec d \} \quad \text{sinon} \tag{34}$$

Pour tout a dans A

$$\pi'(a)_{r,r'} = \kappa'(a)_{r,r'} \qquad \forall r, r' \in R.$$

PROPRIÉTÉ 9 : *Le transducteur* (λ, π', ζ) *réalise la relation* τ.

C'est-à-dire que l'assertion (24) est encore vraie quand on y remplace π par π'. Utilisons une dernière fois notre exemple. En dépit de sa simplicité au départ il va faire hélas apparaître des matrices que leur taille rendra presque aussi illisibles que les équations qu'elles sont supposées illustrer ! Tout d'abord

$$R = \{ 1, (1, a), (1, b), (1, c), (1, d), (1, e), (x, a), (x, e), (y, b) \}$$

et l'homomorphisme η' est défini par les matrices suivantes, dont les lignes et les colonnes sont indexées par R, pris dans l'ordre donné ci-dessus :

$$\eta'(x) = \begin{pmatrix} I^*c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I^* & I^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \kappa'(c)$$

$$\eta'(y) = \begin{pmatrix} I^*d & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I^* \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ e & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \kappa'(d)$$

$$\eta'(xy)=\begin{pmatrix} I^*cI^*d+I^*(a+e) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I^*cI^* \\ a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ e & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ bI^*d & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & bI^* \end{pmatrix}=\kappa'(a)=\kappa'(e)$$

$$\eta'(yx)=\begin{pmatrix} I^*dI^*c+I^*b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I^*dI^* & I^*dI^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ aI^*c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & aI^* & aI^* & 0 \\ eI^*c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & eI^* & eI^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\kappa'(b)$$

Choisissons l'ordre

$$a\prec i\prec b\prec c\prec j\prec d\prec e$$

Comme précédemment il suffit de décrire la ligne d'index ε du transducteur π', ligne indexée par (ε, R) dans cet ordre.

$$\begin{array}{lccccccccc}
\pi'(a)_{\varepsilon,.}=a & I^*cI^*d+I^+a+I^*e & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I^*cI^* \\
\pi'(b)_{\varepsilon,.}=b & (1+jI^*)dI^*c+jI^*b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1+jI^*)dI^* & (1+jI^*)dI^* & 0 \\
\pi'(c)_{\varepsilon,.}=c & jI^*c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & jI^* & jI^*+1 & 0 \\
\pi'(d)_{\varepsilon,.}=d & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\pi'(e)_{\varepsilon,.}=e & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\pi'(i)_{\varepsilon,.}=i & j & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
\pi'(j)_{\varepsilon,.}=j & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0
\end{array}$$

Preuve: Les assertions (25), (26) et (27) sont encore vraies.

Soient f et g deux mots de A^* tels que $g\in\pi'(f)_{\varepsilon,1}$. Il existe une factorisation $f=hak$ telle que

$$g\in\pi'(h)_{\varepsilon,\varepsilon}\pi'(a)_{\varepsilon,r}\pi'(k)_{r,1}$$

Si $a \in I$, de deux choses l'une :

si $r=1$ on est ramené au cas 1 de la section 7 par (30) qui est identique à (21)

si $r \neq 1$ la seule possibilité laissée par (31) est

$$r=(1, b) \quad \text{avec} \quad a \prec b \quad \text{et} \quad v \in \kappa'(k)_{(1,b),1}$$

Alors, d'après la propriété 3 $v=bv'$ donc $h=f \wedge g$ et $f \prec g$. D'après la propriété 8 $v \in \kappa'(k)_{1,1}$ et $\theta(f)=\theta(g)$.

Si $a \in C$ on va distinguer 3 cas :

Cas 1 : $g=hv$ avec $1 \in \pi'(a)_{\varepsilon,r}$ et $v \in \kappa'(k)_{r,1}$. De (32) on déduit que $r=(p, b)$ avec $a \prec b$. D'après la propriété 3 $v = bv'$ donc $h = f \wedge g$ et $f \prec g$. De plus $v \in \kappa'(ak)_{1,1}$ et $\theta(f)=\theta(g)$.

Cas 2 : $g=hev$ avec $e \in I^+$ et $v \in \kappa'(k)_{r,1}$. D'après (32) et (33) $e=be'$ avec $b \in I_a$ donc $a \prec b$. Il s'ensuit que $h=f \wedge g$ et $f \prec g$; de plus $e \in \kappa'(a)_{1,r}$ et $ev \in \kappa'(ak)_{1,1}$ donc $\theta(f)=\theta(g)$.

Cas 3 : $g=hdv$ avec $d \in A^+$, $d \in \kappa'(a)_{1,r}$, et $a \prec d$. Ce cas est identique au cas 4 de la section 7.

Réciproquement, soient f et g deux mots de A^* tels que $g \in \tau(f)$. Le cas où f est un facteur gauche de g est réglé comme à la section 7 par l'assertion (27). Soit donc $h=f \wedge g$. On a $f=hak$, $g=hbv$ avec $a \prec b$ et $bv \in \kappa'(ak)_{1,1} I^*$. Supposons d'abord que $a \in I$.

Si $b \in I$, alors $b \in I_a$ et $b \in \pi'(a)_{\varepsilon,1}$; de plus $v \in \kappa'(k)_{1,1} I^*$ et $g \in \pi(f)_{\varepsilon,1} I^*$.

Si $b \in C$, on déduit de (31) que $\pi(a)_{\varepsilon,(1,b)}=1$ et, de la propriété 8 que $bv \in \kappa'(k)_{(1,b),1} I^*$. Ainsi $g \in \pi(f)_{\varepsilon,1} I^*$.

Si $a \in C$, la preuve est identique à la partie correspondante de la section 7 ce qui achève la preuve de la propriété 9 et, par là-même, du théorème 2. ■

REMERCIEMENTS

Je remercie Jean Berstel, Dominique Perrin, et Jean-François Perrot pour leurs conseils et leurs encouragements.

J'ai rédigé la version finale de cet article lors de mon séjour au R. I. M. S., à l'Université de Kyoto. Je remercie le Professeur S. Takasu pour son hospitalité, et la J. S. P. S., l'I.N.R.I.A., et le Ministère des Affaires Étrangères pour leurs aides financières apportées à cette occasion.

BIBLIOGRAPHIE

1. A. ARNOLD et M. LATTEUX, *A new proof of two theorems about rational transductions*, Theoret. Computer Sci., vol. 8, 1979, p. 261-263.
2. J. BERSTEL, *Transductions and context-free languages*, Teubner, 1979.

3. S. EILENBERG, *Automata, Languages, and Machines*, vol. A, Academic Press, 1974.
4. K. KOBAYASHI, *Classification of formal languages by functionnal binary transductions*, Inform. and Control, vol. 15, 1969, p. 95-109.
5. J. SAKAROVITCH, *Théorème de transversale rationnelle pour les automates à pile déterministes*, in Proc. of the 4th G. I. Conf. on Theoretical Computer Science. (K. Weikrauch, ed.), Lecture Notes in Computer Sci., vol. 67, Springer, 1979, p. 276-285.
6. J. SAKAROVITCH, *Syntaxe des langages de Chomsky*, Thèse. Sci. Math., Univ., Paris VII, Paris, 1979.