RAIRO
INFORMATIQUE THÉORIQUE

J. BETREMA

Topologies sur des espaces ordonnés

RAIRO – Informatique théorique, tome 16, nº 2 (1982), p. 165-182.
<http://www.numdam.org/item?id=ITA_1982__16_2_165_0>

R.A.I.R.O. Informatique théorique/Theoretical Informatics
(vol. 16, n° 2, 1982, p. 165 à 182)

TOPOLOGIES SUR DES ESPACES ORDONNÉS (*)

par J. BETREMA [1]

communiqué par la Rédaction

Résumé. — *On précise d'abors les propriétés topologiques des espaces de mots (ou d'arbres) infinis lorsqu'on les munit d'une métrique déjà classique, où par exemple la distance de deux arbres caractérise la hauteur jusqu'à laquelle ils sont identiques. On compare ensuite la continuité pour cette métrique avec la continuité « faible » habituelle (préservation des bornes supérieures des suites croissantes). Une deuxième partie définit une topologie originale, dite topologie gauche, et établit une condition suffisante pour que les fonctions « faiblement » continues soient exactement les fonctions croissantes et continues.*

Abstract. — *We first study the topological properties of spaces of infinite words (or trees) when equipped with an already classical metric, where for example the distance between two trees is characteristic of the depth until they are identical. We then compare the continuity for this metric, and the "weak" continuity (where least upper bounds of increasing sequences are preserved). A second part presents a new topology, called left topology, and establishes a sufficient condition such that the weak continuous functions are exactly the increasing and continuous ones.*

Une branche de la sémantique des langages de programmation se développe depuis un certain nombre d'années autour de la notion de « calcul infini » (*cf.* l'article [9] de D. Scott, 1971). Une première voie a conduit à l'utilisation de c. p. o. (ensembles partiellement ordonnés, où toute suite croissante possède une borne supérieure), et de fonctions dites « continues », ou « faiblement continues », qui conservent les bornes supérieures de suites croissantes. Il s'agit des « sémantiques de points fixes » : *voir* en particulier [8 et 10].

Ce point de vue a conduit aux succès que l'on sait, mais se prête mal à une extension au non-déterminisme. A. Arnold et M. Nivat ont été alors amenés à définir une métrique sur les mots (ou les arbres) infinis : *voir* [1]. Cette nouvelle approche de la notion de calcul infini conduit en particulier à la notion d'adhérence d'un langage (*cf.* [7]), et suscite de nombreux travaux.

Le présent article se propose de comparer les notions de fonctions continues qu'on rencontre dans ces deux approches. La métrique qui y est définie est, aux

(*) Reçu décembre 1979, révisé en avril 1981.
([1]) Université de Poitiers, Laboratoire d'Informatique, Bâtiment L, 40, avenue du Recteur Pineau, 86022 Poitiers Cedex, France.

R.A.I.R.O. Informatique théorique/Theoretical Informatics, 0399-0540/1982/165 /$ 5.00

notations près, celle de [1], et on en rappelle certaines propriétés, plus ou moins connues, et utiles pour la suite. On montre en particulier, dans cette partie, que les espaces obtenus sont des « espaces de Cantor ». On utilise d'autre part l'ordre dit « syntaxique » de [6], et on montre alors que la continuité pour la métrique est une notion beaucoup plus restrictive que la « continuité » au sens des c. p. o. On montre aussi que l'espace des fonctions continues n'est pas un c. p. o. : il existe des suites croissantes dont la borne supérieure n'est pas continue.

Une deuxième partie introduit sur les c. p. o. une topologie, originale à ma connaissance (ce n'est ni la « topologie de l'ordre », ni la « topologie des intervalles » de [2]), et appelée *topologie gauche*; l'idée est de remplacer les intervalles $]ab[$ de l'analyse classique par des ensembles du type $\{x/x \nleqq a$ et $x \leqq b\}$.

On compare en particulier cette topologie avec des tentatives différentes, sur le même thème, qu'on trouve dans [8] et [10] (*voir* aussi [3]), et on énonce une condition simple, vérifiée dans le cas qui nous intéresse des mots (ou des arbres) infinis, et qui assure que les fonctions « continues » au sens des c. p. o. sont exactement les fonctions croissantes et continues, au sens de la topologie gauche.

I. MÉTRIQUE SUR UN ESPACE DE « MOTS »

Soit X un ensemble (fini ou non); on appellera $\mathscr{S}(X)$ l'ensemble des suites partiellement définies à valeurs dans X : un élément $u \in \mathscr{S}(X)$ est une application $u : \mathbb{N} \rightarrow X \bigcup \{\perp\}$.

Si X est considéré comme un alphabet, l'ensemble X^* des mots (finis) peut être immergé dans $\mathscr{S}(X)$ par l'application :

$$X^* \rightarrow \mathscr{S}(X),$$

$$x_1 x_2 \ldots x_n \rightarrow u$$

défini par : $u(k) = si\ k \leqq n\ alors\ x_k\ sinon\ \perp$.

Dans la suite on supposera réalisée cette immersion, et X^* sera considéré comme une partie de $\mathscr{S}(X)$. On désignera par X^ω l'ensemble des suites partout définies à valeurs dans X, c'est-à-dire des éléments de $\mathscr{S}(X)$ dont l'image est incluse à X. On notera X^∞ la réunion $X^* \bigcup X^\omega$.

Remarquons qu'il n'est pas obligatoire, dans ce qui suit, de considérer X comme un alphabet : un autre cas intéressant est $X = \mathbb{N}$, et $\mathscr{S}(\mathbb{N})$ est l'ensemble des fonctions arithmétiques partiellement définies.

Si u est un élément de $\mathscr{S}(X)$, l'image de l'entier k par u sera notée $u(k)$ – le symbole u_k sera réservé pour désigner le k-ième terme d'une suite d'éléments de $\mathscr{S}(X)$. Par référence au langage A.P.L. :

$$v = k \uparrow u \text{ (facteur gauche d'ordre } k \text{ de } u)$$

est défini par :

$$v(j) = si\ j \leqq k\ alors\ u(j)\ sinon\ \perp.$$

En particulier $0 \uparrow u$ est l'élément $\perp\perp\perp\ldots$ de $\mathscr{S}(X)$, qui sera aussi noté, par abus, $\perp$.

On appellera parfois *mots* les éléments de $\mathscr{S}(X)$; il s'agit donc de mots « partiellement définis ». On abrègera parfois $\mathscr{S}(X)$ en $\mathscr{S}$.

A) Ordre sur $\mathscr{S}(X)$

L'ordre grossier sur $X \cup \{\perp\}$, défini par :

$$a \leqq b \text{ si et seulement si } a = b \text{ ou } a = \perp$$

induit un ordre naturel sur $\mathscr{S}(X)$:

$$u \leqq v \text{ si et seulement si, pour tout entier } k : u(k) \leqq v(k)$$

[i. e. $u(k) = v(k)$ ou $u(k) = \perp$]; on dit aussi que u est « moins défini » que v; cet ordre est évidemment partiel.

Pour cet ordre, $\mathscr{S}(X)$ est un demi-treillis inférieur : deux éléments u et v ont pour borne inférieure $u \wedge v$ défini par :

$$(u \wedge v)(k) = si\ u(k) = v(k)\ alors\ u(k)\ sinon\ \perp;$$

plus généralement toute partie de $\mathscr{S}(X)$ possède une borne inférieure. Toute suite *croissante* (ou toute partie dirigée) de $\mathscr{S}(X)$ possède une borne supérieure, et en particulier, pour tout élément $u \in \mathscr{S}(X)$, on a :

$$u = \operatorname*{Sup}_{n \in \mathbb{N}} (n \uparrow u)$$

B) Métrique sur $\mathscr{S}(X)$

On peut définir la *distance* de deux éléments u, v de $\mathscr{S}(X)$ par : $d(u, v) = si\ u = v$ *alors* 0 *sinon* $1/2^m$ avec :

$$m = \operatorname{Inf}\{k / u(k) \neq v(k)\}.$$

Il est facile de vérifier qu'il s'agit bien d'une distance, qui est même ultramétrique : $d(u, w) \leqq \operatorname{Sup}(d(u, v), d(v, w))$ et bornée par $1/2$. On a :

$$d(u, v) < 1/2^n \text{ si et seulement si } (n \uparrow u) = (n \uparrow v)$$

et la proposition suivante donne quelques relations entre cette distance et l'ordre.

PROPOSITION 1 : *Pour tous éléments u, v, w, x, y de $\mathscr{S}(X)$, on a :*
(i) $d(x, u \wedge v) \leqq \operatorname{Sup}(\mathrm{d}(\mathrm{x}, \mathrm{u}), \mathrm{d}(\mathrm{x}, \mathrm{v}))$;
(ii) $d(u \wedge v, x \wedge y) \leqq \operatorname{Sup}(d(u, x), d(v, y))$;
(iii) $u \leqq v \leqq w$ *implique* $d(u, v) \leqq d(u, w)$ et $d(v, w) \leqq d(u, w)$. □

C) Topologie induite par la métrique sur $\mathscr{S}(X)$

Notons $B_n(u) = \{ x \in \mathscr{S} / (n \uparrow x) = (n \uparrow u) \}$ [si le contexte est clair, on abrège $\mathscr{S}(X)$ en $\mathscr{S}$]. $B_n(u)$ est la boule ouverte de centre u et de rayon $1/2^n$; les $B_n(u)$ forment donc une base de voisinages de u (lorsque n décrit $\mathbb{N}$) pour la topologie métrique définie sur $\mathscr{S}$ par la distance d précédente.

On dira qu'un élément $u \in \mathscr{S}$ est *fini* s'il existe un entier n tel que :

$$k \geqq n \quad \text{implique} \quad u(k) = \perp.$$

L'ensemble des mots finis forme une partie *dense* dans $\mathscr{S}$, car les ouverts du type :

$$B_n(u), \text{ avec } u \text{ fini},$$

forment une *base* d'ouverts [en fait la famille de ces ouverts n'est pas différente de la famille complète des boules ouvertes, puisque $B_n(u) = B_n(n \uparrow u)$]. Si X est fini ou dénombrable, $\mathscr{S}(X)$ est donc séparable (i. e. possède une base dénombrable d'ouverts).

Dans cette topologie, la notion de limite est très simple :

PROPOSITION 2 : *On a* : $u = \lim u_n$ *si et seulement si, pour tout entier k, il existe p tel que :*

$$n \geqq p \quad \textit{implique} \quad u(k) = u_n(k)$$

[*autrement dit la suite $u_n(k)$, pour k fixé, est stationnaire*].

Démonstration : D'une part $u_n \in B_k(u)$ signifie $(k \uparrow u_n) = (k \uparrow u)$, et en particulier $u_n(k) = u(k)$.

D'autre part, inversement, soit $p_1, p_2, \ldots, p_k$ des entiers tels que :

$$n \geqq p_i \qquad \text{implique} \quad u(i) = u_n(i).$$

En posant $p = \mathrm{Sup}(p_1, p_2, \ldots, p_k)$, on obtient :

$$n \geqq p \qquad \text{implique} \quad (k \uparrow u) = (k \uparrow u_n) \quad \text{d'où} \quad u_n \in B_k(u). \quad \square$$

On remarque que toute suite *croissante* u_n est donc convergente, et :

$$\lim u_n = \mathrm{Sup}\ (u_n).$$

De même, comme toute suite de Cauchy u_n est telle que, pour k fixé, $u_n(k)$ soit une suite stationnaire, on en déduit :

PROPOSITION 3 : *$\mathscr{S}(X)$ est un espace métrique complet.* $\square$
Les propositions suivantes sont aussi immédiates :

PROPOSITION 4 : *Soit deux suites convergentes telles que, pour tout entier n : $u_n \leqq v_n$. Alors :* $\lim u_n \leqq \lim v_n$. $\square$

PROPOSITION 5 : *X^∞ est fermé dans $\mathscr{S}(X)$.* $\square$
[Rappelons que $u \in X^\infty$ si et seulement si : $u(k) = \perp$ implique, pour tout $k' \geqq k$: $u(k') = \perp$].

X^∞ est donc muni, par la distance envisagée ici, d'une structure d'espace métrique complet; cette métrique a été en particulier utilisée par M. Nivat, pour introduire la notion d'*adhérence* d'un langage, dans [7].

Ceci dit, l'espace métrique $\mathscr{S}(X)$ est bien connu des mathématiciens : c'est l'abominable *espace de Cantor*, qui vérifie le théorème suivant, lorsque X est un ensemble fini :

THÉORÈME 6 : *Si X est un ensemble fini, l'espace métrique $\mathscr{S}(X)$ est compact et totalement discontinu; par suite il est homéomorphe à l'espace triadique de Cantor.*

Démonstration : On sait déjà que $\mathscr{S}(X)$ est complet; pour montrer qu'il est compact, il suffit de vérifier que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un recouvrement fini de $\mathscr{S}(X)$ par des boules de rayon ε. Soit n tel que $1/2^n$ soit inférieur à ε, et soit F_n l'ensemble des éléments finis de $\mathscr{S}(X)$ dont la longueur est inférieure ou égale à n [i. e. $u \in F_n$ si et seulement si $k > n$ implique $u(k) = \perp$]. F_n est un ensemble fini, et les boules $B_n(u)$, avec $u \in F_n$ (n reste fixé), recouvrent manifestement $\mathscr{S}(X)$.

Les $B_n(u)$, avec n fixé et u parcourant F_n, forment aussi une *partition* de $\mathscr{S}(X)$ par des ouverts de diamètre arbitrairement petit, ce qui prouve que $\mathscr{S}(X)$ est totalement discontinu (i.e. les composantes connexes sont réduites à des singletons). Enfin, on peut montrer (*cf.* [4]) que tout espace métrique compact, totalement discontinu, et sans point isolé, est homéomorphe à l'espace triadique de Cantor (qui correspond ici au cas où X ne contient qu'un élément). $\square$

REMARQUE : X^{ω}, muni de la métrique induite, possède alors la topologie *produit*, X étant muni de la topologie discrète; ceci confirme que, lorsque X est fini, X^{ω} est compact; idem pour $\mathscr{S}(X)=X'^{\omega}$, avec $X'=X\cup\{\perp\}$. Quant à X^{∞}, il est aussi compact et totalement discontinu, mais contient en outre une infinité dénombrable de points isolés, à savoir les mots finis (qui par ailleurs forment une partie dense); notez que les mots finis ne sont par contre pas isolés dans $\mathscr{S}(X)$.

D) Produit de concaténation et contraction

Si u est un élément de $\mathscr{S}(X)$, et si m est un mot fini de longueur p [i. e. p est le plus petit entier tel que $k>p$ implique $m(k)=\perp$], on peut définir le produit de concaténation $v=m.u$ par :

$$v(k)=si\ k\leqq p\ alors\ m(k)\ sinon\ u(k-p).$$

Cette opération est contractante au sens suivant :

PROPOSITION 7 : *Si m est un mot fini de longueur p, on a, pour tous éléments u, v de $\mathscr{S}(X)$:*

$$d(m.u,\ m.v)=\frac{1}{2^p}d(u,\ v).$$

En particulier, si m n'est pas le mot vide :

$$d(m.u,\ m.v)\leqq\frac{1}{2}d(u,\ v).\quad\square$$

E) Fonctions continues et s.c. continues

$f:\mathscr{S}\to\mathscr{S}$ est dite s. c. continue (i. e. continue pour les suites croissantes) si, pour toute suite croissante (u_n), on a :

$$f(\mathrm{Sup}\ u_n)=\mathrm{Sup}\,f(u_n).$$

On sait que l'importance des fonctions s.c. continues (on dit souvent « continues », ou « faiblement continues », mais ces termes sont un peu vagues) vient du « théorème du point fixe » : toute fonction f s. c. continue admet un plus petit point fixe u défini par : $u=Sup\,f^n(\perp)$ (où $\perp$ désigne par abus l'élément minimal de $\mathscr{S}$).

Une fonction s.c. continue est nécessairement croissante, et une fonction croissante et continue (pour la métrique) est nécessairement s.c. continue (puisque pour une suite croissante, les notions de limite et de borne supérieure coïncident). Mais la réciproque n'est pas vraie, comme le prouve le contre-exemple suivant :

$$X=\{a, b\}, f: \mathscr{S}(X) \to \mathscr{S}(X) \text{ est définie par :}$$

$$f(x) = si\ a \in x\ alors\ x\ sinon\ \perp$$

$$[\text{où } a \in x \text{ signifie : } \exists k : x(k)=a].$$

Il est clair que f est s.c. continue; par contre, si on considère la suite :

$$u_1 = baaa\ldots a\ldots,$$

$$u_2 = bbaaa\ldots a\ldots,$$

$$u_3 = bbbaa\ldots a\ldots,$$

etc.

on a :

$$u = \lim u_n = bbbbb\ldots b\ldots$$

d'où : $f(u)=\perp$ tandis que $f(u_n)=u_n$ et $\lim f(u_n)=u$. f n'est pas continue.

L'ensemble Φ des fonctions $\mathscr{S}(X) \to \mathscr{S}(X)$ peut être muni d'un ordre et d'une métrique; par définition :

$$f \leqq g \text{ si et seulement si } \forall x : f(x) \leqq g(x),$$

$$d(f, g) = \operatorname*{Sup}_{x \in \mathscr{S}} d(f(x), g(x)).$$

Les limites dans cet espace sont donc des limites *uniformes*.

On appellera CC l'ensemble des fonctions $f \in \Phi$ qui sont croissantes et continues et SC l'ensemble des fonctions $f \in \Phi$ qui sont s.c. continues. On a donc : $CC \subset SC \subset \Phi$.

THÉORÈME 8 :

(i) *Φ est un espace métrique complet;*

(ii) *CC est fermé dans Φ;*

(iii) *SC est fermé dans Φ.*

Démonstration : (i) est un résultat classique d'analyse, qui découle de la complétude de $\mathscr{S}$.

Ensuite on remarque que toute limite point par point de fonctions croissantes est croissante, car (*cf.* prop. 4) le passage à la limite conserve l'ordre.

(ii) est alors aussi un résultat bien connu d'analyse (une limite uniforme de fonctions continues est continue).

(iii) Soit $f=\lim f_n$, avec par hypothèse f_n s. c. continue; f est croissante; il reste donc à montrer qu'elle conserve les limites de suites croissantes. Soit une suite croissante u_n, et $u=\lim u_n$; soit $\varepsilon > 0$; il existe p tel que :

$$d(f, f_p) < \varepsilon.$$

On fixe cet entier p; f_p est s. c. continue, donc pour tout n suffisamment grand :

$$d(f_p(u),\ f_p(u_n)) < \varepsilon.$$

D'où :

$$d(f(u),\ f(u_n)) \leqq d(f(u),\ f_p(u)) + d(f_p(u),\ f_p(u_n)) + d(f_p(u_n),\ f(u_n)) < 3\,\varepsilon.$$

Ce qui prouve que f est s. c. continue. □

En ce qui concerne l'ordre, Φ est un demi-treillis inférieur : $f \wedge g$ est la fonction définie par : $\forall x : (f \wedge g)(x) = f(x) \wedge g(x)$; plus généralement, toute famille de fonctions f_n possède une borne inférieure $\operatorname{Inf} f_n$.

PROPOSITION 9 : *CC et SC sont fermés pour l'opération* $\wedge$.

Démonstration : Immédiat, en utilisant en particulier la partie (ii) de la proposition 1. □

Les espaces CC et SC sont donc des espaces métriques complets, en même temps que des demi-treillis inférieurs; en outre ils possèdent un élément minimal. On pourrait espérer qu'ils possèdent alors la même propriété que $\mathscr{S}(X)$, à savoir :

« Tout suite croissante est convergente »

et on pourrait alors entamer une construction « à la Scott », en considérant l'espace des applications $CC \to CC$ (par exemple), etc.; hélas la propriété précédente n'est pas vraie, comme le montre le contre-exemple suivant :

Soit f_n la suite de fonctions définies par :

$$f_n(x) = si\ a \in (n \uparrow x)\ alors\ x\ sinon\ \perp$$

(on prend $X = \{a, b\}$).

On voit que la suite (f_n) est une suite croissante dans CC; sa limite point par point est la fonction f définie par :

$$f(x) = si\ a \in x\ alors\ x\ sinon\ \perp$$

et on a déjà vu que cette fonction n'est pas continue; la suite f_n n'est donc pas convergente au sens de la métrique de CC, sinon celà contredirait le théorème 8; d'ailleurs, en considérant $u_n = bbb\ldots baaa\ldots a\ldots$ (avec n lettres b), on a : $f(u_n)=u_n$ alors que $f_n(u_n)=\perp$ d'où $d(f(u_n), f_n(u_n))=1/2$ et : $d(f, f_n)=1/2$.

Par contre on a :

PROPOSITION 10 : *Soit (f_n) une suite croissante dans SC, et soit f sa limite point par point; alors $f \in SC$.*

Démonstration : C'est un calcul facile sur les bornes supérieures : ce résultat ne fait pas intervenir la métrique, car limite, ici, coïncide avec borne supérieure. □

F) Métrique et ordre sur les arbres

On suppose donnés deux alphabets (non nécessairement finis) :

X : alphabet des variables;

F : alphabet gradué des symboles de fonctions; chaque élément $f \in F$ est pourvu d'une arité $\rho(f)$, qui est un entier positif ou nul.

$\perp$ est un symbole spécial, n'appartenant ni à X, ni à F; on pose :

$$X' = X \cup F \cup \{\perp\}.$$

L'ensemble $\mathscr{M}_\perp(F, X)$, qu'on désignera souvent simplement par $\mathscr{M}$, est l'ensemble des éléments de X'^* défini récursivement par :

(i) $\perp \in \mathscr{M}$;

(ii) toute variable $x \in X$ est élément de $\mathscr{M}$;

(iii) Si $f \in F$ a pour abrité p, et si $t_1, \ldots, t_p$ sont des éléments de $\mathscr{M}$:

$$t = ft_1 \ldots t_p \text{ est un élément de } \mathscr{M}$$

(il faut comprendre que tout élément de $\mathscr{M}$ peut être obtenu par l'une des règles ci-dessus). Un élément de $\mathscr{M}$ est appelé *arbre fini.*

Un résultat classique (*cf.* notation polonaise) indique que tout terme de $\mathscr{M}$ est dérivé de manière non ambiguë par les règles ci-dessus; autrement dit, si $t \in \mathscr{M}$ n'est pas une variable, ni $\perp$, le symbole f et les termes $t_1, \ldots, t_p$ tels que $t = ft_1, \ldots, t_p$ sont déterminés de manière unique. Ceci permet des définitions récursives sur $\mathscr{M}$ comme celle qui suit.

Si t est un élément de $\mathscr{M}$, et n un entier positif, on définit le *sous-arbre initial d'ordre* n de t (noté $n \uparrow t$) (2) par :

(i) si t est une variable, ou $\perp$, ou un symbole de fonction d'arité 0 :

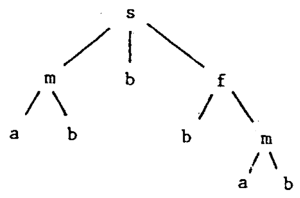
$$n \uparrow t = t;$$

(ii) si $t = ft_1 \ldots t_p (p \geqq 1)$:

$$n \uparrow t = f((n-1) \uparrow t_1) \ldots ((n-1) \uparrow t_p) \quad \text{si} \quad n \geqq 2,$$

$$1 \uparrow t = f \perp \perp \ldots \perp \ (p \text{ symboles } \perp).$$

Exemple : si $t = smabbfbmab$ représenté par :

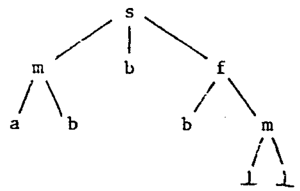


(s, m, f sont des symboles de fonctions, d'arités respectives 3, 2 et 2; a et b sont des variables) :

$$n \uparrow t = t \quad \text{si} \quad n \geqq 4$$

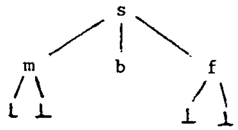
$$3 \uparrow t = smabbfbm \perp \perp$$

représenté par :



$$2 \uparrow t = sm \perp \perp bf \perp \perp$$

représenté par :

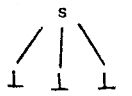


(2) Si t est considéré comme un élément de $\mathscr{S}(X \cup F)$, cette définition ne coïncide pas avec celle des sections précédentes, mais le contexte devrait être clair, et ce qui suit justifie la notation choisie.

et :

$$1 \uparrow t = s \perp\perp\perp$$

représenté par :



En clair, $n \uparrow t$ est obtenu à partir de t en « oubliant l'information » au delà du niveau n.

On peut alors définir dans $\mathscr{M}$ une *distance* ultramétrique par :

$$d(t,\ t') = si\ t = t'\ alors\ 0\ sinon\ 1/2^m \text{ avec } m = \operatorname{Inf}\{k/k \uparrow t \neq k \uparrow t'\}.$$

Le complété de $\mathscr{M}$ pour cette distance est l'espace $\mathscr{M}^\infty$ des arbres finis ou infinis. Une suite de Cauchy (t_p) dans $\mathscr{M}$ est telle que, pour tout entier n fixé, $n \uparrow t_p$ est constant pour tout p suffisamment grand : on retrouve bien la notion intuitive d'arbre infini et, si $t = \lim t_p$, on définit $n \uparrow t$ comme la valeur de $n \uparrow t_p$ pour p suffisamment grand. La distance sur $\mathscr{M}^\infty$ est alors définie par la même formule que celle sur $\mathscr{M}$.

L'ordre sur $\mathscr{M}$ peut être défini récursivement par :

(i) pour tout arbre $t : \perp \leqq t$;

(ii) pour toute variable x, on a : $x \leqq t$ si et seulement si $t = x$;

(iii) pour tout arbre $t = ft_1\, t_2 \ldots t_p$, on a $t \leqq t'$ si et seulement si $t' = ft'_1\, t'_2 \ldots t'_p$ et pour tout i : $t_i \leqq t'_i$.

Cet ordre peut ensuite être étendu à $\mathscr{M}^\infty$ en posant : $t \leqq t'$ si et seulement si, pour tout entier n : $n \uparrow t \leqq n \uparrow t'$ (on vérifie que les définitions sur $\mathscr{M}^\infty$ recoupent bien celles sur $\mathscr{M}$, dans le cas d'arbres finis).

Toute *suite croissante* dans $\mathscr{M}^\infty$ possède une borne supérieure qui est en même temps sa limite, et en particulier, pour tout arbre t :

$$t = \operatorname{Sup}(n \uparrow t) = \lim (n \uparrow t),$$

$\mathscr{M}^\infty$ est aussi un *demi-treillis inférieur* (la définition formelle de $t \wedge t'$ peut être facilement construite sur le schéma des définitions précédentes). La proposition 1 (rapports entre distance et ordre) reste valable.

La topologie métrique ainsi définie sur $\mathscr{M}^\infty(F, X)$ est similaire à celle de $\mathscr{S}(X)$: on obtient un espace *complet totalement discontinu*, qui est *compact* si F et X sont des ensembles finis.

Substitution et contraction

Si t est un arbre infini, on a, pour tout entier n positif :

$$n \uparrow t = f t_{1,n} t_{2,n} \dots t_{p,n},$$

où f et p sont fixés. Soit $t_i = \lim_n t_{i,n}$; on écrira encore :

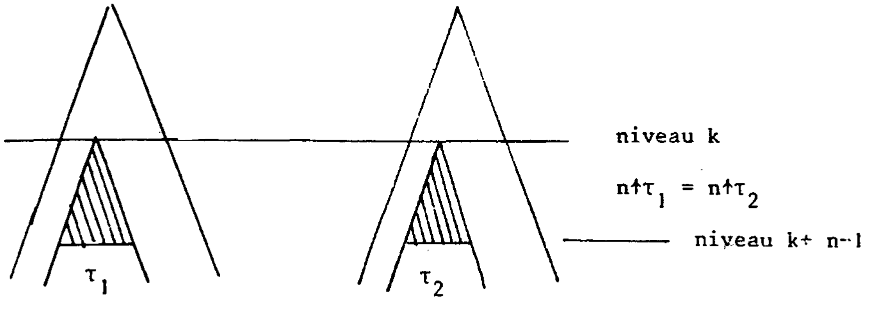
$$t = f t_1 t_2 \dots t_p,$$

bien que cette écriture ne représente pas une concaténation dans X'^{∞}. $t_1, \dots, t_p$ sont les *sous-arbres* (ou *termes*) de *t enracinés au niveau* 2; de proche en proche, on définira ainsi les sous-arbres enracinés au niveau k ($k > 2$), t étant son propre sous-arbre enraciné au niveau 1. On appellera *terme* de t tout arbre appartenant à la famille ainsi définie. Si t est un arbre fini, ses termes sont aussi les arbres t' tels que $t = ut'v$ dans X'^*. Il ne faut pas confondre les termes de t et ses sous-arbres initiaux $n \uparrow t$.

On peut, dans un arbre (fini ou infini), greffer un arbre t'' à la place d'un terme t', par substitution de t'' à t' (les détails formels de la définition suivent le schéma des premières définitions de cette section sur les arbres). Le résultat de cette greffe est noté $t[t''/t']$, et cette greffe est contractante (sauf si $t' = t$!) en effet, si t' est enraciné au niveau k dans t :

$$d(t[\tau_1/t'], t[\tau_2/t']) = \frac{1}{2^{k-1}} d(\tau_1, \tau_2)$$

conformément au schéma suivant :



Fonctions continues et s. c. continues

La section E peut être généralisée en remplaçant $\mathscr{S}(X)$ par $\mathscr{M}^{\infty}(F, X)$: les résultats sont conservés.

II. TOPOLOGIE GAUCHE SUR UN ESPACE ORDONNÉ

Soit un ensemble ordonné (partiellement) D, possédant un élément minimal, noté $\perp$, et complet pour les suites croissantes (en abrégé : s. c. complet) : toute suite croissante d'éléments de D possède une borne supérieure dans D. Un tel ensemble ordonné, souvent appelé *c.p.o.* (ou *i.p.o.*) dans la littérature (une variante fréquente est d'exiger que tout ensemble dirigé possède une borne supérieure), permet d'obtenir un « théorème de point fixe ».

Pour définir la topologie gauche sur D, on remplace les intervalles classiques des ensembles totalement ordonnés par les ensembles du type :

$$\{x/x \leqq u \text{ et } x \nleqq v\}.$$

On notera :

$$G(u)=\{x\in D/x \leqq u\},$$
$$\tilde{G}(u)=\{x\in D/x \nleqq u\}$$

[$\tilde{G}(u)$ est le complémentaire de $G(u)$ dans D] et, par définition, un *voisinage de base* V de $u\in D$ est formé de l'intersection de $G(u)$ avec une famille *finie* (éventuellement vide) d'ensembles $\tilde{G}(v_i)$:

$$V=G(u)\cap\tilde{G}(v_1)\cap\ldots\cap\tilde{G}(v_n)$$

avec la condition supplémentaire :

$$u\in V, \text{ c'est-à-dire : } \forall i: u\nleqq v_i.$$

La famille des voisinages de base de u ainsi définie constitue, pour u fixé, une base de filtre, par construction; la topologie gauche sur D est alors définie de la manière habituelle : un ouvert est un ensemble U qui, avec tout point u, contient un voisinage de base de u. Cette topologie est *séparée* : en effet, si u, v sont deux éléments distincts de D, on ne peut avoir simultanément $u \leqq v$ et $v \leqq u$; on peut donc supposer $u \nleqq v$, et dans ce cas $G(u)\cap\tilde{G}(v)$ est un voisinage de u, et il est disjoint de $G(v)$, voisinage de v.

Base d'ouverts

Si u est un élément de D, $G(u)$ est ouvert pour la topologie gauche; en effet :

$$x\in G(u) \quad \text{implique} \quad G(x)\subset G(u).$$

$G(u)$ est aussi fermé, car $\tilde{G}(u)$ est ouvert : si $x\in\tilde{G}(u)$, $G(x)\cap\tilde{G}(u)$ est un voisinage de x (car la condition $x\nleqq u$ est satisfaite) inclus à $\tilde{G}(u)$.

Soit $\mathscr{G}$ la famille des $G(u)(u\in D)$ et de leurs complémentaires $\tilde{G}(u)$. Tout ouvert est réunion des voisinages de base de ses points, donc est réunion d'intersections finies d'éléments de $\mathscr{G}$: dans la terminologie de [4] on dit que $\mathscr{G}$ est une *sous-base* de la topologie gauche de D; cette sous-base a la particularité d'être formée d'ensembles à la fois ouverts et fermés.

Limites de suites croissantes

Le théorème suivant relie les bornes supérieures de suites et leurs limites (pour la topologie gauche) dans tout c. p. o. D :

THÉORÈME 1 : (i) *soit une suite* croissante (u_n) *d'éléments de* D, *et soit* u *sa borne supérieure; alors* $u = \lim u_n$;

(ii) *soit une suite convergente* (u_n), *et* $u = \lim u_n$; *alors il existe un entier* p *tel que :* $u = \sup_{n \geqq p} u_n$.

Démonstration : (i) Par hypothèse, si v vérifie $u \nleqq v$, ce n'est pas un majorant de la suite (u_n); soit p tel que $u_p \nleqq v$; on a :

$$p \leqq n \qquad \text{implique} \quad u_p \leqq u_n,$$

d'où : $u_n \nleqq v$.

Soit $V = G(u) \cap \widetilde{G}(v_1) \cap \ldots \cap \widetilde{G}(v_k)$ un voisinage de base de u; on a donc : $\forall i : u \nleqq v_i$.

Donc il existe $p_1, p_2, \ldots, p_k$ tels que : $p_i \leqq n$ implique $u_n \nleqq v_i$.

En posant $p = \text{Sup}(p_1, p_2, \ldots, p_k)$, on a :

$$p \leqq n \qquad \text{implique} \quad u_n \in V \text{ (car en outre } u_n \leqq u),$$

ce qui prouve : $u = \lim u_n$.

(ii) Par hypothèse, il existe p tel que :

$$p \leqq n \qquad \text{implique} \quad u_n \leqq u$$

[car $G(u)$ est un voisinage de u].

u est donc un majorant des $u_n (n \geqq p)$; soit v un autre majorant, et supposons par l'absurde $u \nleqq v$; alors $G(u) \cap \widetilde{G}(v)$ est un voisinage de u, et il ne contient aucun des $u_n (n \geqq p)$: contradiction. Ceci prouve que : $u = \text{Sup}_{n \geqq p} u_n$. □

Exemple 1 : *Ensemble* $P\omega$ *des parties de* $\mathbb{N}$.

Cet ensemble est partiellement ordonné par la relation d'inclusion.

De façon générale, pour avoir des voisinages V de u « aussi fins » que possible dans une topologie gauche, du type :

$$V = G(u) \cap \widetilde{G}(v_1) \cap \ldots \cap \widetilde{G}(v_n),$$

on a intérêt à choisir les v_i « aussi grands » que possible [car $v \leqq w$ implique : $\tilde{G}(w) \subset \tilde{G}(v)$].

Soit U un élément de P; pour tout entier a, notons C_a l'ensemble des entiers distincts de a; on a : $T \subset C_a$ si et seulement si $a \in T$. Donc, si $a_1, \ldots, a_n$ sont des éléments de U :

$$\mathscr{V} = G(U) \cap \tilde{G}(C_{a_1}) \cap \ldots \cap \tilde{G}(C_{a_n}) = \{T \subset U / \forall i : a_i \in T\}$$

est un voisinage ouvert de U. En d'autres termes :

$$\mathscr{V} = \{T / B \subset T \subset U\},$$

où B est une partie *finie* incluse dans U, est un voisinage ouvert de U. Il est facile de vérifier que ces voisinages forment, lorsque B varie, une base de voisinages de U.

Exemple 2 : *Ensemble* $\mathscr{S}(X)$ *des suites partiellement définies à valeurs dans* X.

Les notations sont les mêmes que dans la partie I de cet article.

Soit u un élément de $\mathscr{S}(X)$; pour chaque entier k tel que $u(k) \neq \perp$, soit v_k défini par : $v_k(j) = si\ j = k\ alors\ \perp\ sinon\ u(j)$ (en clair, v_k est obtenu en « amputant » u de son k-ième caractère). On a :

$$G(u) \cap \tilde{G}(v_k) = \{x \leqq u / x(k) = u(k)\},$$

ce qui prouve que, par intersection finie d'ensembles de ce type :

$$V_n(u) = \{x \leqq u / n \uparrow x = n \uparrow u\} = \{x / n \uparrow u \leqq x \leqq u\} = B_n(u) \cap G(u)$$

est un voisinage ouvert de u; ces voisinages forment, lorsque n varie, une base de voisinages de u. En particulier u est isolé (pour la topologie gauche) si et seulement si u est fini [au sens de la section I : il existe un entier p tel que $n \geqq p$ implique $u(n) = \perp$].

Soit $B_n(u) = \{x / n \uparrow x = n \uparrow u\}$ une boule ouverte pour la métrique de $\mathscr{S}$, et soit $x \in B_n(u)$;

$$V_n(x) = B_n(x) \cap G(x) = B_n(u) \cap G(x) \subset B_n(u),$$

ce qui prouve que $B_n(u)$ est un ensemble ouvert pour la topologie gauche, qui est donc *plus fine* que la topologie métrique sur $\mathscr{S}$ (topologie « de Cantor »).

On peut comparer les topologies (gauches) des exemples précédents avec d'autres topologies rencontrées dans la littérature :

(i) Scott, dans [10], définit les voisinages de base de $U \in P\omega$ par :

$$\mathscr{V} = \{X / B \subset X\},$$

où B est une partie finie de U, comme ci-dessus; cette topologie est « gravement » non séparée, puisque deux voisinages de deux éléments distincts ont toujours une intersection non vide !

(ii) Plotkin, dans [8], définit, pour des c. p. o. dits ω-algébriques, dont $\mathscr{S}(X)$ est un exemple (si X est au plus dénombrable), les voisinages de base de u par :

$$V=\{x/x \geqq e_0;\ x \ngeqq e_i (i=1, 2, \ldots, n)\},$$

où $e_0, e_1, \ldots, e_n$ sont des éléments finis tels que $u \geqq e_0$ et $u \ngeqq e_i$ $(i=1, \ldots, n)$. Si X est fini, un peu de réflexion montre qu'on retrouve exactement la topologie métrique; dans tous les cas [Plotkin étudie des c. p. o. plus généraux que les $\mathscr{S}(X)$] on obtient un « espace de Cantor » (compact et totalement discontinu) : par exemple dans le cas de X^∞, avec X infini, $X=\{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$, toute suite de mots (u_n) telle que, pour tout n, $u_n(1)=a_n$, converge vers le mot vide !

Notons que $P\omega$, qui peut être identifié avec $\mathscr{S}(X)$ dans le cas où X ne contient qu'un élément, *n'est pas compact* pour la topologie gauche : les singletons, qui sont des points isolés, forment à eux seuls une infinité dénombrable d'ouverts, et l'ensemble des éléments de $P\omega$ de cardinal au moins 2 est lui aussi ouvert, d'où un recouvrement de $P\omega$ par une infinité d'ouverts disjoints.

$P\omega$, muni de la topologie gauche, *n'est pas* non plus *métrisable;* en effet $P\omega$ est séparable : les éléments finis forment une partie dense dénombrable; donc si $P\omega$ est métrisable, il possède une base dénombrable $\mathscr{B}$ d'ouverts. Pour chaque $U \in P\omega$, comme $G(U)$ est ouvert, il existe un ouvert $\mathscr{B}_U \in \mathscr{B}$ tel que :

$$U \in \mathscr{B}_U \subset G(U).$$

D'où $U \neq V$ implique $\mathscr{B}_U \neq \mathscr{B}_V$ ce qui contredit le fait que $P\omega$ n'est pas dénombrable.

Exemple 3 : *Ensemble $\mathscr{M}^\infty(F, X)$ des arbres finis ou infinis.*

On obtient des résultats similaires aux précédents par la même technique : on définit le résultat de l'amputation, dans un arbre t, d'un terme $t' \neq \perp$ comme égal à : $t' \uparrow t = t[\perp / t']$. Si $t'_1, t'_2, \ldots, t'_k$ sont les termes de t enracinés à un niveau inférieur ou égal à n :

$$G(t) \cap \widetilde{G}(t'_1 \uparrow t) \cap \ldots \cap \widetilde{G}(t'_k \uparrow t)=\{\tau \leqq t/n \uparrow \tau = n \uparrow t\},$$

est un voisinage ouvert de t, et les voisinages de ce type forment une base de voisinages de t.

Exemple 4 : *Segment* $[0 \ 1] \subset \mathbb{R}$.

C'est un c. p. o., l'ordre ayant évidemment la particularité d'être total; un voisinage de base de u est alors un intervalle du type $]v \ u]$ avec $v < u$; la topologie obtenue est celle (non métrisable) de la convergence à gauche.

Fonctions G-continues

Une fonction $f : D \to D'$, où D et D' sont des c. p. o., sera dite, pour abréger, *G-continue si elle est continue pour les topologies gauches de D* et D'.

PROPOSITION 2 : *f est G-continue si et seulement si, pour tout élément v de D', $f^{-1}(G(v))$ est à la fois ouvert et fermé dans D.*

Démonstration : (i) Si f est G-continue, les images réciproques par f des ouverts $G(v)$ et $\tilde{G}(v)$ sont ouvertes.

(ii) Réciproquement, tout ouvert de D' est réunion d'intersections finies d'ensembles du type $G(v)$ ou $\tilde{G}(v)$; donc si les images réciproques de ces ensembles sont des ouverts, l'image réciproque par f de tout ouvert est ouverte, et f est G-continue. □

Une fonction G-continue n'est pas forcément croissante : considérer la fonction $f : [0 \ 1] \to [0 \ 1]$ définie par $f(x) = si \ x \leqq 1/2 \ alors \ 1 \ sinon \ 0$. Mais on a le résultat suivant, qui découle immédiatement de la partie (i) du théorème 1 [rappelons qu'une fonction s. c. continue est une fonction f telle que pour toute suite croissante $(u_n) : f(\operatorname{Sup} u_n) = \operatorname{Sup} f(u_n)$] :

PROPOSITION 3 : *Toute fonction croissante et G-continue est s. c. continue.* □

L'intéressant est la réciproque; il semble nécessaire de supposer que la situation rencontrée dans les exemples 1 à 4 a bien lieu, c'est-à-dire de supposer :

Pour tout élément $u \in D$, il existe une suite croissante (u_n) telle que les intervalles $[u_n \ u] = \{x / u_n \leqq x \leqq u\}$ forment une base de voisinages de u (pour la topologie gauche).

Un c. p. o. D possédant cette propriété sera dit *de type fini*. Tous les c. p. o. des exemples 1 à 4 sont de type fini. On a alors le théorème :

THÉORÈME 4 : *Toute fonction $f : D \to D'$ s. c. continue, où D est un c. p. o. de type fini, est G-continue (i. e. continue pour les topologies gauches de D et D').*

Démonstration : Soit u un élément de D, et soit (u_n) une suite croissante telle que les intervalles $[u_n \ u]$ forment une base de voisinages de u pour la topologie gauche. Il est clair que $u = \lim u_n$, et comme f est s. c. continue, on a, en utilisant le théorème 1 : $f(u) = \lim f(u_n)$. Soit W un voisinage de base de $f(u)$:

$$W = \{y / y \leqq f(u); \ y \nleqq w_1; \ \ldots; \ y \nleqq w_k\}.$$

Il existe n tel que : $f(u_n) \in W$, d'où : $f([u_n \ u]) \subset W$ car :

$x \leqq u$ implique :

$$f(x) \leqq f(u)$$

(toute fonction s. c. continue est croissante).

$u_n \leqq x$ implique :

$$f(x) \nleqq w_i \qquad (i=1, 2, \ldots, k)$$

ce qui achève la démonstration. □

Note : Si on appelle *approximations finies* de u les u_n qui interviennent dans la définition d'un espace de type fini, on peut montrer que l'espace des fonctions s. c. continues (autrement dit : croissantes et G-continues) $[0 \ 1] \to [0 \ 1]$ est de type fini, les approximations finies étant des fonctions (croissantes) en escalier.

BIBLIOGRAPHIE

1. A. ARNOLD et M. NIVAT, *The Metric Space of Infinite Trees : Algebraïc and Topological Properties*, Fundamenta Informaticae, vol. 4, 1980, p. 445-476.
2. G. BIRKHOFF, *Lattice Theory*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1967.
3. S. L. BLOOM et R. TINDEL, *Compatible Orderings on the Metric Theory of Trees in Les Arbres en Algèbre et en Programmation*, 4e colloque, Lille, 1979, p. 18-23.
4. J. L. KELLEY, *General Topology*, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1955.
5. J. MYCIELSKI et W. TAYLOR, *A Compactification of the Algebra of Terms*, Algebra Universalis, vol. 6, 1976, p. 159-163.
6. M. NIVAT, *On the Interpretation of Recursive Polyadic Program Schemes*, Symposia Mathematica, vol. 15, 1975, p. 255-281.
7. M. NIVAT, *Sur les ensembles de mots infinis engendrés par une grammaire algébrique*, R.A.I.R.O. Informatique théorique, vol. 12, 1978, p. 259 à 278.
8. G. D. PLOTKIN, *A Powerdomain Construction*, S.I.A.M. J. on Computing, vol. 5, 1976, p. 452-487.
9. D. SCOTT, *The Lattice of Flow-Diagrams, in* ENGELER, éd., Symposim on Semantics of Algorithmic Languages, Lecture Notes in Mathematics 188, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1971, p. 311-372.
10. D. SCOTT, *Data Types as Lattices*, S.I.A.M. J. on Computing, vol. 5, 1976, p. 522-587.