RAIRO
INFORMATIQUE THÉORIQUE

F. POUSSIN

Énumération des permutations par nombre de marches

RAIRO – Informatique théorique, tome 13, n° 3 (1979), p. 251-255.
<http://www.numdam.org/item?id=ITA_1979__13_3_251_0>

R.A.I.R.O. Informatique théorique/Theoretical Informatics
(vol. 13, n° 3, 1979, p. 251 à 255)

ÉNUMÉRATION DES PERMUTATIONS PAR NOMBRE DE MARCHES (*)

F. POUSSIN [1]

Communiqué par R. CORI

Résumé. — *Une permutation* $a_1\ a_2 \dots a_n$ *présente une « marche » en* a_i *si* $a_{i+1}=a_i-1$. *On démontre que le nombre* $M(n, k)$ *de permutations présentant exactement* k *marches est lié au nombre classique* $d(n)$ *des permutations sans rencontres par la relation :* $M(n, k)=\binom{n-k}{k} d(n-k+1)/(n-k)$.

Abstract. — *A step in a permutation* $a_1\ a_2 \dots a_n$ *is an* a_i *such that* $a_{i+1}=a_i-1$. *It is proved that the number* $M(n, k)$ *of permutations with exactly* k *steps is given by* $M(n, k)=\binom{n-k}{k} d(n-k+1)/(n-k)$ *where* $d(n)$ *is the number of derangements (permutations with every element displaced).*

INTRODUCTION

Les propriétés combinatoires des permutations, notamment l'énumération des permutations suivant le nombre de leurs pics, creux, montées, descentes, ont trouvé récemment des applications remarquables à l'évaluation de certaines structures de données [4].

On s'est depuis longtemps intéressé à l'énumération des permutations en fonction du nombre de leurs descentes, c'est-à-dire que pour une permutation $\sigma=\sigma(1) \dots \sigma(n)$ on comptait sous diverses conditions le nombre des i tels que $\sigma(i)>\sigma(i+1)$ $(1 \leq i<n)$. Voir entre autres [1, 3].

On peut aussi distinguer ces descentes suivant leur « hauteur », c'est-à-dire selon la valeur de $\sigma(i)-\sigma(i+1)$ si $\sigma(i)>\sigma(i+1)$. On s'intéresse ici, dans un premier temps, au cas où $\sigma(i)-\sigma(i+1)=1$.

Ainsi, on dit qu'une permutation $\sigma(1) \dots \sigma(n)$ présente une marche s'il existe $i (1 \leq i<n)$ tel que $\sigma(i)=\sigma(i+1)+1$. Nous calculons ici le nombre de permutations de $[n]$ qui ont un nombre donné k de marches.

(*) Reçu mai 1978, révisé octobre 1978.

[1] Université de Picardie, Amiens, et L. A. « Informatique théorique et Programmation », Paris.

R.A.I.R.O. Informatique théorique/Theoretical Informatics, 0399-0540/1979/251/$ 4.00

I. DÉFINITIONS ET NOTATIONS

$[n]$ est l'ensemble des entiers $\{1, \ldots, n\}$. Soit a une permutation de $[n]$, on notera a sous la forme $a_1, a_2, \ldots, a_n$. On dira que la permutation a présente une marche en i si $a_i = a_{i+1} + 1$ $(1 \leqq i < n)$. On notera $\mathcal{M}(n, k)$ l'ensemble des permutations de $[n]$ qui ont k marches et $M(n, k)$ le nombre d'éléments de $\mathcal{M}(n, k)$. Pour une permutation $a \in \mathcal{M}(n, k)$ on notera $\operatorname{supp}(a) = \{ a_i \mid a_i \neq a_{i+1} + 1 \}$ et $\operatorname{sp}(a) = a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_{n-k}}$ avec $a_{i_j} \in \operatorname{supp}(a)$ $(1 \leqq j \leqq n-k)$ et $i_1 < i_2 \ldots < i_{n-k}$.

Exemple : $a = 1\ 7 \searrow 6\ 3\ 5 \searrow 4\ 2$ a deux marches : $a \in \mathcal{M}(7, 2)$:

$$\operatorname{supp}(a) = \{1, 2, 3, 4, 6\}$$
$$\operatorname{sp}(a) = 1\ 6\ 3\ 4\ 2.$$

LEMME : *Si a et b sont deux permutations de $[n]$ alors* $a \neq b \Leftrightarrow \operatorname{sp}(a) \neq \operatorname{sp}(b)$.

En effet, il est évident que si $a \in \mathcal{M}(n, k)$ alors $|\operatorname{supp}(a)| = n-k$. Donc si $a \in \mathcal{M}(n, k_1)$ et $b \in \mathcal{M}(n, k_2)$ avec $k_1 \neq k_2$ alors $a \neq b$ et $\operatorname{sp}(a) \neq \operatorname{sp}(b)$. Supposons donc $a, b \in \mathcal{M}(n, k)$. Si $\operatorname{supp}(a) \neq \operatorname{supp}(b)$ alors $a \neq b$ (d'après la construction de supp) et $\operatorname{sp}(a) \neq \operatorname{sp}(b)$.

Reste le cas où $\operatorname{supp}(a) = \operatorname{supp}(b)$. Comme en partant d'un a donné on ne construit qu'un seul $\operatorname{sp}(a)$ il est évident que $\operatorname{sp}(a) \neq \operatorname{sp}(b) \Rightarrow a \neq b$.

Si $a \neq b$ alors il existe $p < q$ et $p' < q'$ tels que $a_p = b_{q'}$ et $a_q = b_{p'}$ on peut toujours supposer que $a_p, a_q \in \operatorname{supp}(a)$ et $b_{q'}, b_{p'} \notin \operatorname{supp}(b)$, car si par exemple $a_p \notin \operatorname{supp}(a)$ on considère $a_{p+1} = a_p - 1$ et $b_{q'+1} = b_{q'} - 1$ puisqu'on est dans le cas où $\operatorname{supp}(a) = \operatorname{supp}(b)$. Mais ceci entraînera $\operatorname{sp}(a) \neq \operatorname{sp}(b)$ comme on se convainc en examinant le schéma de la figure.

$$\begin{array}{rl}
a = & a_1 \ldots a_p \ldots a_q \ldots a_n \\
& \qquad \updownarrow \qquad \updownarrow \\
\operatorname{sp}(a) = & a_{i_1} \ldots a_p \ldots a_q \ldots a_{i_{n-k}} \\
\\
\operatorname{sp}(b) = & b_{j_1} \ldots b_{p'} \ldots b_{q'} \ldots b_{j_{n-k}} \\
& \qquad \updownarrow \qquad \updownarrow \\
b = & b_1 \ldots b_{p'} \ldots b_{q'} \ldots b_n
\end{array}$$

Figure — a_p est situé avant a_q dans $\operatorname{sp}(a)$, mais $b_{q'} = a_p$ est situé après $b_{p'} = a_q$ dans $\operatorname{sp}(b)$.

PROPRIÉTÉ 1 : On a $M(n, k) = \binom{n-1}{k} M(n-k, 0)$, pour $n > 1$ et $0 \leqq k \leqq n-1$.

Démonstration : Soit $b = b_1 b_2 \ldots b_{n-k}$ une permutation de $\mathcal{M}(n-k, 0)$. Prenons une application ψ de $[n-k]$ dans $[n]$ telle que $\psi(1) = 1$ et $i < j \Rightarrow \psi(i) < \psi(j)$. Il y a évidemment $\binom{n-1}{k}$ applications qui répondent à ces conditions. Posons $b'=b'_1 b'_2 \ldots b'_{n-k}$ et $b_\psi=\{b'_1, b'_2, \ldots, b'_{n-k}\}$ avec $b'_i=\psi(b_i)$ $(1 \leqq i \leqq n-k)$. Construisons alors b'', une permutation de $[n]$ de la façon suivante :

si $i \in [n]$ et si $i \notin b_\psi$ alors $\exists j$ tel que $b''_j=i$, $b''_{j+1}=i-1$;

si $b''_i=b'_p b''_j=b'_q$ alors $p<q \Rightarrow i<j$.

Exemple : Soit $b=1\ 3\ 4\ 2$; prenons $b'=1\ 5\ 7\ 4$; on a alors $b''=3 \searrow 2 \searrow 1\ 6 \searrow 5\ 7\ 4 \in \mathscr{M}(7, 3)$.

Il est clair d'après la construction utilisée que $b'' \in \mathscr{M}(n, k)$ et que $\mathrm{sp}(b'')=b'$.

Montrons que toutes les permutations de $\mathscr{M}(n, k)$ peuvent être engendrées par cette méthode. Soit $b'' \in \mathscr{M}(n, k)$, $b'=\mathrm{sp}(b'')$; il est évident que $1 \in \mathrm{supp}(b'')$. On peut donc trouver ψ tel que $\psi^{-1}(b')$ soit une permutation de $[n-k]$; de plus $\psi^{-1}(b') \in \mathscr{M}(n-k, 0)$. Supposons en effet que $\psi^{-1}(b')$ présente une marche :

$$\psi^{-1}(b')=b=b_1 \ldots b_j \searrow b_{j+1} \ldots b_{n-k} \qquad \text{avec} \quad b_j-1=b_{j+1}.$$

Considérons $b'=b'_1 \ldots b'_j b'_{j+1} \ldots b'_{n-k}$; ou bien $b'_j=b'_{j+1}+1$ mais alors $b' \neq \mathrm{sp}(b'')$ ou bien pour tout entier i $(b'_j<i<b'_{j+1})$: $i \notin b_\psi$ et b'' sera de la forme $b''_1 \ldots b''_j \searrow b''_j-1 \searrow \ldots \searrow b''_{j+1} \ldots$ ce qui est incompatible avec $b'=\mathrm{sp}(b'')$.

Montrons qu'on ne peut ainsi engendrer deux permutations b'' identiques. Prenons a et b appartenant à $\mathscr{M}(n-k, 0)$, $a \neq b$:

$$a=a_1 \ldots a_{n-k}, \qquad a'=a'_1 \ldots a'_{n-k}, \qquad a'_i=\psi_1(a_i), \qquad a_{\psi_1}=\{a'_i\},$$
$$b=b_1 \ldots b_{n-k}, \qquad b'=b'_1 \ldots b'_{n-k}, \qquad b'_i=\psi_2(b_i), \qquad b_{\psi_2}=\{b'_i\}.$$

Si on suppose $a \neq b$ alors il existe i tel que $a_i<a_{i+1}$ et $b_i>b_{i+1}$. Mais on aurait $a'_i<a'_{i+1}$ et $b'_i>b'_{i+1}$, donc $a \neq b \Rightarrow a' \neq b'$. Or $a'=\mathrm{sp}(a'')$ et $b'=\mathrm{sp}(b'')$ donc d'après le lemme ceci entraîne $a'' \neq b''$.

PROPRIÉTÉ 2 : On a $M(n, 0)=(n-1).M(n-1, 0)+M(n-1, 1)$ pour $n>2$.

Démonstration : Soit $a=a_1 \ldots a_{j-1} a_j a_{j+1} \ldots a_n \in \mathscr{M}(n, 0)$ une permutation de $[n]$ sans marche telle que $a_j=n$. Considérons la permutation $a'=a_1 \ldots a_{j-1}, a_{j+1} \ldots a_n$; c'est une permutation de $[n-1]$. Deux cas peuvent se produire :

– ou $a_{j-1}=a_{j+1}+1$ et alors $a' \in \mathscr{M}(n-1, 1)$;
– ou $a_{j-1} \neq a_{j+1}+1$ et alors $a' \in \mathscr{M}(n-1, 0)$.

Réciproquement, soit $a'=a_1 \ldots a_{n-1} \in \mathscr{M}(n-1, 1)$, il lui correspond une seule permutation de $\mathscr{M}(n, 0)$: $a=a_1 \ldots a_i n a_{i+1} \ldots a_{n-1}$. Soit $a'=a_1 \ldots a_{n-1} \in \mathscr{M}(n-1, 0)$, il lui correspond $n-1$ permutations de $\mathscr{M}(n, 0)$ car on peut insérer n devant $a_1, a_2, \ldots,$ ou a_{n-1} (sauf devant a_i si $a_i=n-1$) et on peut aussi insérer n après a_{n-1}.

Il est évident que deux permutations construites par cette méthode ne peuvent être égales.

Une permutation sans « rencontres », ou sans point fixe est une permutation a telle que $a_i \neq i$ $(1 \leqq i \leqq n)$. Le nombre des permutations de $[n]$ sans rencontres est généralement noté $d(n)$ et obéit à la relation de récurrence $d(n+1)=n(d(n)+d(n-1))$ [2, 5].

PROPRIÉTÉ 3 : On a $M(n, 1)=d(n)$ pour $n \geqq 1$.

Démonstration : D'après 1 : $M(n+1, 1)=n.M(n, 0)$,

donc d'après 2 : $M(n+1, 1)=n\,((n-1).M(n-1, 0)+M(n-1, 1))$,

mais d'après 1 : $M(n, 1)=(n-1).M(n-1, 0)$,

donc $M(n+1, 1)=n.(M(n, 1)+M(n-1, 1))$.

On voit que cette relation de récurrence est semblable à celle du nombre de permutations sans rencontres. De plus, $M(1, 1)=d(1)=0$ car $\mathscr{M}(1, 1)=\emptyset$; $M(2, 1)=d(2)=1$ car $\mathscr{M}(2, 1)$ est formé de la permutation 2 1.

PROPRIÉTÉ 4 : On a les égalités suivantes :

(A)
$$M(n, k)=\binom{n-1}{k} \frac{d(n-k+1)}{n-k},$$

(B)
$$M(n, k)=\binom{n-1}{k} \frac{(n-k+1)!}{n-k} \sum_{i=0}^{n-k+1} \frac{(-1)^i}{i!}.$$

Démonstration : La formule (A) découle directement des propriétés 1 et 3. La formule (B) lui est équivalente.

Table des $M(n, k)$, $2 \leqq n \leqq 8$, $0 \leqq k < n$

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7
2...	1	1						
3...	3	2	1					
4...	11	9	3	1				
5...	53	44	18	4	1			
6...	309	265	110	30	5	1		
7...	2 119	1 854	795	220	45	6	1	
8...	16 687	14 833	6 489	1 855	385	63	7	1

BIBLIOGRAPHIE

[1] L. Carlitz et R. Scoville, *Some Permutation Problems*, J. Comb. Th., vol. A 22, 1977, p. 129-146.

[2] L. Comtet, *Analyse combinatoire*, P.U.F., Paris, 1970.

[3] D. Foata et M. P. Schützenberger, *Théorie géométrique des polynômes eulériens*, Lecture Notes in Mathematics n° 138, Springer-Verlag, 1970.

[4] F. Françon, *Histoires de fichiers*, R.A.I.R.O. Informatique théorique, vol. 12, 1978, p. 49-62.

[5] J. Riordan, *An Introduction to Combinatorial Analysis*, Wiley, 1959.