RAIRO
INFORMATIQUE THÉORIQUE

MICHEL LATTEUX

Mots infinis et langages commutatifs

RAIRO – Informatique théorique, tome 12, nº 3 (1978), p. 185-192.
<http://www.numdam.org/item?id=ITA_1978__12_3_185_0>

R.A.I.R.O. Informatique théorique/Theoretical Computer Science
(vol. 12, n° 3, 1978, p. 185 à 192)

MOTS INFINIS ET LANGAGES COMMUTATIFS (1)

par Michel LATTEUX

Communiqué par R. V. BOOK

Résumé. — *Le langage d'un mot infini u est l'ensemble des facteurs gauches de u qui ont une longueur finie. Nous donnons une caractérisation multiple des langages d'un mot infini qui sont rationnels et nous montrons la rationnalité de tout langage d'un mot infini appartenant à* $\mathscr{C}$ (COM), *le plus petit cône rationnel contenant les langages commutatifs. Ceci permet d'établir l'incomparabilité de* $\mathscr{C}$ (COM) *et de* DOL, *la famille des* DOL-*langages.*

INTRODUCTION

Un travail important en théorie des langages est la comparaison, au sens de l'inclusion, de différentes familles de langages. Alors que l'inclusion d'une famille $\mathscr{L}_1$ dans une famille $\mathscr{L}_2$ est en général facile à démontrer (si elle est vérifiée), il est souvent plus délicat de prouver que $\mathscr{L}_1$ n'est pas inclus dans $\mathscr{L}_2$. Une méthode pour obtenir ce résultat est de trouver une propriété, P, vérifiée par tous les langages de $\mathscr{L}_2$ mais qui se révèle fausse pour un langage de $\mathscr{L}_1$. Il est, alors, intéressant de se poser la question suivante : quelles sont les familles de langages déjà définies vérifiant la propriété P ? Dans [1], R. V. Book considère les langages ayant la propriété de préfixe, c'est-à-dire les langages L qui vérifient : $\forall x, y \in L$, soit x est un préfixe (facteur gauche) de y, soit y est un préfixe de x. Pour une famille de langage $\mathscr{L}$, il considère la propriété : tout langage de $\mathscr{L}$ ayant la propriété de préfixe est rationnel (regular). En fait, dès que $\mathscr{L}$ est clos par intersection avec les langages rationnels et par homomorphisme, cette propriété est équivalente à : tout langage de $\mathscr{L}$ défini sur un alphabet d'une seule lettre est rationnel (*cf.* [5]).

(*) Reçu novembre 1977, révisé février 1978.
(1) Université de Lille I, U.E.R. d'I.E.E.A., Service Informatique, Villeneuve-d'Ascq.

Nous allons considérer, dans ce papier, une propriété un peu plus faible en nous restreignant aux langages qui ont la propriété de préfixe et qui vérifient $L = \text{Init}(L) = \{ x/\exists\, y, xy \in L \}$. Chacun de ces langages est l'ensemble des facteurs gauches d'un mot infini (*cf.* [7]) et nous les appellerons langages d'un mot infini. Nous allons, d'abord, montrer pour ces langages l'équivalence entre le fait d'être rationnel, d'être semi-linéaire, de contenir un langage borné infini. Ceci va nous permettre de montrer la rationnalité de tout langage d'un mot infini appartenant à $\mathscr{F}_\sigma$ (COM), le plus petit cône rationnel clos par substitution et contenant les langages commutatifs (fermés par permutation). Nous en déduisons, alors, l'incomparabilité au sens de l'inclusion de $\mathscr{F}_\sigma$ (COM) et de la famille des DOL-langages.

PRÉLIMINAIRES

Soit X un alphabet fini. Un *mot infini* u sur l'alphabet X est une application de $\mathbf{N}_+$, l'ensemble des entiers positifs, dans X et on note $u \in X^\omega$ (*cf.* [7]). Le mot infini u est *finalement périodique* s'il existe $r \in \mathbf{N} = \mathbf{N}_+ \cup \{ 0 \}$ et $q \in \mathbf{N}_+$ tels que pour tout i supérieur à r, $u(i+q) = u(i)$. Le *langage du mot infini* u est égal à $\{ \varepsilon \} \cup \{ u(1) \ldots u(k)/k \in \mathbf{N}_+ \}$.

Pour tout mot $w \in X^*$, $lg\,(w)$ désigne la longueur de w et pour tout $a \in X$, $lg_a(w)$ est égal au nombre d'occurrences de la lettre a dans w. Le mot vide, de longueur zéro, sera noté ε. Un langage $L \subseteq X^*$ est *borné* s'il existe $w_1, \ldots, w_k \in X^*$ tels que $L \subseteq w_1^* \ldots w_k^*$. Un ensemble $A \subseteq \mathbf{N}$ est dit rationnel si le langage $\{ a^i/i \in A \}$ est un langage rationnel.

Pour tout $k \in \mathbf{N}_+$, $\mathbf{N}^k = \{ (x_1, \ldots, x_k)/x_i \in \mathbf{N}, \forall\, i \in \{ 1, \ldots, k \} \}$. Un ensemble $B \subseteq \mathbf{N}^k$ est un *ensemble linéaire* s'il existe $x_0 \in \mathbf{N}^k$,

$$P = \{ x_1, \ldots, x_n \} \subseteq \mathbf{N}^k,$$

qui est l'ensemble des périodes, tels que

$$B = \left\{ x_0 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, x_i/\lambda_i \in \mathbf{N} \right\},$$

ensemble que l'on notera $L(x_0; P)$. Toute union finie d'ensembles linéaires de $\mathbf{N}^k$ sera appelée *ensemble semi-linéaire*. Pour tout alphabet ordonné $X = \{ a_1, \ldots, a_k \}$, la *fonction de Parikh*, ψ_X (notée ψ s'il n'y a pas d'ambiguité) est la fonction qui à tout $w \in X^*$ fait correspondre $(lg_{a_1}(w), \ldots, lg_{a_k}(w)) \in \mathbf{N}^k$. Un langage est *semi-linéaire* si son image par la fonction de Parikh est un ensemble semi-linéaire. Enfin nous appellerons *cône rationnel* (full Trio) toute famille de langages close par homomorphisme, homomorphisme inverse et intersection avec les langages rationnels. Pour tout langage L et toute famille de langages $\mathscr{L}$, $\mathscr{C}(L)$ [resp. $\mathscr{C}(\mathscr{L})$] désignera le plus petit cône rationnel contenant $\{\mathscr{L}\}$ (resp. $\mathscr{L}$).

RÉSULTATS

Un langage L est, par définition, langage d'un mot infini si $L=\text{Init}(L)$ et si L vérifie la propriété de préfixe. Il est clair que cette deuxième condition peut être remplacée par l'égalité des mots de L de même longueur, donc :

PROPOSITION 1 : *Soit L un langage tel que $L=\text{Init}(L)$. Alors L vérifie la propriété de préfixe si et seulement si L ne possède pas deux mots différents de même longueur.*

Caractérisons, maintenant, les langages d'un mot infini qui sont rationnels :

PROPOSITION 2 : *Soit L le langage d'un mot infini $u\in X$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) $\exists\, x,\ y\in X^+$ *tels que* $L=\text{Init}(xy^*)$;

(ii) *L est un langage rationnel;*

(iii) $\forall\, b\in X$, $u^{-1}(b)$ *est un ensemble rationnel;*

(iv) *L contient un langage borné infini;*

(v) *le langage L est semi-linéaire.*

Démonstration : L'équivalence entre (i), (ii) et (iii) a été établie dans [5]. D'autre part, il est clair que (ii) implique (iv) et (v).

Montrons que (iv) entraîne (i). Par hypothèse, il existe $w_1, \ldots, w_p\in X^+$ tels que $L\cap w_1^* \ldots w_p^*$ soit infini. Donc, il existe $i\in\{1, \ldots, p\}$ tel que $\forall\, k\in\mathbf{N}$, $L\cap w_1^* \ldots w_i^k\, w_i^* \ldots w_p^*$ soit non vide. Prenons le plus petit i vérifiant cette propriété. Alors,

$$F=\{z\in w_1^* \ldots w_{i-1}^*/\exists\, z'\in w_i^* \ldots x_p^*,\ zz'\in L\}$$

est fini et non vide. Il existe donc, dans F, un mot x tel que $\forall\, k\in\mathbf{N}$, $L\cap x\, w_i^k\, w_i^* \ldots w_p^*$ soit non vide. Comme $L=\text{Init}(L)$ et que $w_i\neq\varepsilon$, on en déduit que $L\cap x\, w_i^*$ est infini. Alors pour tout $z\in L$ et tout $z'\in xw_i^*$, il existe $y\in L\cap x\, w_i^*$ qui possède z et z' comme facteur gauche ce qui entraîne $L\subseteq\text{Init}(x\, w_i^*)\subseteq\text{Init}(L)$ et donc $L=\text{Init}(x\, w_i^*)$.

Supposons, maintenant, que le langage L soit semi-linéaire. Alors

$$\psi(L)=S=\bigcup_{i=1}^{n} L(c_i;\ P_i).$$

Posons

$$X=\{a_1, \ldots, a_k\}$$

et pour tout

$$z=(z_1, \ldots, z_k)\in \mathbf{N}^k, \qquad |z|=\sum_{i=1}^{k} z_i.$$

Montrons que si

$$z=(z_1, \ldots, z_k) \quad \text{et} \quad z'=(z'_1, \ldots, z'_k)$$

sont deux périodes de S,

$$\forall t\in\{1, \ldots, k\}, \quad z_t|z'|=z'_t|z|.$$

En effet, il existe, dans S,

$$y=(y_1, \ldots, y_k) \quad \text{et} \quad y'=(y'_1, \ldots, y'_k)$$

tels que $L(y; \{z\})$ et $L(y'; \{z'\})$ soient inclus dans S. Supposons qu'il existe $t\in\{1, \ldots, k\}$ tel que $z_t|z'|>z'_t|z|$. Prenons, alors, $s\in\mathbf{N}$ et posons

$$x=(x_1, \ldots, x_k)=y+s|z'|z$$

et

$$x'=(x'_1, \ldots, x'_k)=y'+(s+|y|)|z|z'.$$

Comme $z_t|z'|\geqq z'_t|z|+1$, nous avons

$$x_t-x'_t\geqq s+y_t-y'_t-|y|\,.\,|z|z'_t$$

et comme $|z|\,.\,|z'|\geqq 1$, $|x'|\geqq|x|$. Si s a été choisi suffisamment grand, $x_t-x'_t>0$. Il existe w, $w'\in L$ tels que

$$\psi(w)=x \quad \text{et} \quad \psi(w')=x'$$

avec

$$lg(w')=|x'|\geqq|x|=lg(w)$$

et comme L a la propriété de préfixe, $\psi(w')\geqq\psi(w)$ ce qui contredit le fait que $x_t-x'_t>0$. Cette propriété implique l'existence de $y\in\mathbf{N}^k$ tel que, $\forall x\in P=\bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{P}_i$, $\exists s\in\mathbf{N}$ vérifiant $y=sx$ et on peut trouver deux ensembles finis $F, F'\subseteq\mathbf{N}^k$ tels que

$$S=F\cup\{z+\lambda y/z\in F', \lambda\in\mathbf{N}\}.$$

Comme F est fini et

$$lg(L)=\{|z|/z\in S\}=\mathbf{N}, \qquad \forall i\in\{0, \ldots, |y|\},$$

il existe $z_i\in \mathrm{F}'$ tel que $|z_i|=i \bmod. |y|$.

Prenons $j\in\{0, \ldots, |y|-1\}$. Il existe, alors, α, β, $r\in\mathbf{N}$ tels que $r=|z_{j+1}|+\alpha|y|=|z_j|+\beta|y|+1$. Prenons $\lambda\in\mathbf{N}$ et considérons w, le mot de L

de longueur $r+\lambda|y|$. Le mot w peut se factoriser en $w'bw''c$ avec b, $c \in X$, $lg(w'b)=r$ et $lg(w''c)=\lambda|y|$. Comme lg est une fonction injective sur L et que tout facteur gauche de w appartient à L, on obtient :

$$\psi(bw'')=\psi(w'bw'')-\psi(w')=\lambda y \quad \text{et} \quad \psi(w''c)=\psi(w)-\psi(w'b)=\lambda y,$$

ce qui implique $\psi(b)=\psi(c)$ et donc $b=c$ puisque b et $c \in X$. Donc, $\forall \lambda \in \mathbf{N}$, $u(r+\lambda|y|)=u(r)$. Comme j a été choisi de façon quelconque dans $\{0, \ldots, |y|-1\}$, on en déduit que u est finalement périodique et L est un langage rationnel [5]. □

Le fait que tout langage d'un mot infini qui est semi-linéaire est aussi rationnel est à opposer au résultat de Book [1] qui montre l'existence d'un langage semi-linéaire, non rationnel ayant la propriété de préfixe. En fait, l'existence d'un tel langage se ramène à l'existence de mots infinis qui ne sont pas finalement périodiques. En effet, la proposition suivante montre le lien très étroit qui existe entre la famille $\mathscr{L}$ des langages d'un mot infini et la famille $\mathscr{L}'$ des langages semi-linéaires ayant la propriété de préfixe :

PROPOSITION 3 : *Pour tout langage L de $\mathscr{L}$ (resp. $\mathscr{L}'$) il existe un langage L' appartenant à $\mathscr{L}'$ (resp. $\mathscr{L}$), rationnellement équivalent à L [i.e. $\mathscr{C}(L)=\mathscr{C}(L')$].*

Démonstration : Soit $L \subseteq X^*$, un langage de $\mathscr{L}$ avec $X=\{a_1, \ldots, a_k\}$. Considérons l'homomorphisme h défini sur X par : $\forall i \in \{1, \ldots, k\}$, $h(a_i)=a_i \ldots a_k a_1 \ldots a_{i-1}$ et posons $L'=h(L)$. Il est clair que $\psi(L')=\psi((a_1 \ldots a_k)^*)$ et que $h^{-1}(L')=L$. Et comme la propriété de préfixe est conservée par homomorphisme, $L' \in \mathscr{L}'$.

Réciproquement, soit $L \subseteq X^*$ un langage de $\mathscr{L}'$ avec $X=\{a_1, \ldots, a_k\}$. Si L est fini, il suffit de prendre $L'=a^*$. Si L est infini, posons $L'=\mathrm{Init}(L)$. Le langage L' appartient à $\mathscr{L}$ et à $\mathscr{C}(L)$. D'autre part, comme L est un langage semi-linéaire, $B=\{w \in X^*/lg(w) \in lg(L)\}$ est un langage rationnel et $L=L' \cap B \in \mathscr{C}(L')$. □

Nous allons, maintenant, montrer que si L est le langage d'un mot infini appartenant à $\mathscr{C}$ (COM), le plus petit cône rationnel contenant les langages commutatifs, alors L est un langage rationnel. Pour obtenir ce résultat, établissons, d'abord, que tout langage infini $L \in \mathscr{C}$ (COM) contient un langage borné infini. Nous utiliserons une propriété concernant les langages rationnels :

LEMME 4 : *Tout langage rationnel R contient un langage rationnel borné R' tel que $\psi(R)=\psi(R')$.*

Démonstration : Comme la propriété est vraie pour les langages finis et qu'elle est conservée par union et par produit, il nous suffit, d'après le théorème de Kleene, de montrer que si R est un langage rationnel vérifiant cette propriété, R^*

la vérifie aussi. Comme $R' \subseteq R$ implique $R'^* \subseteq R^*$ et $\psi(R')=\psi(R)$ implique $\psi(R'^*)=\psi(R^*)$, on peut supposer que R est un langage rationnel borné. Supposons, d'abord, R inclus dans $a_1^* \dots a_k^*$ où les a_i sont des symboles distincts. Alors R peut s'écrire, $R=\bigcup_{i=1}^{n} (R_{i,1} \dots R_{i,k})$ où pour tout $j \in \{1, \dots, k\}$ et tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $R_{i,j}$ est un langage rationnel inclus dans a_j^*. Comme tout langage rationnel inclus dans b^* est une union finie de langages de la forme $b^s(b^t)^*$ avec $s, t \in \mathbf{N}$, on peut supposer que chacun des $R_{i,j}$ est de cette forme. D'autre part, R^* contient $A_1^* \dots A_n^*$ et $\psi(R^*)=\psi(A_1^* \dots A_n^*)$ où pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $A_i=R_{i,1} \dots R_{i,k}$. Il suffit, alors, de montrer que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, il existe un langage rationnel borné B_i tel que $B_i \subseteq A_i^*$ et $\psi(B_i)=\psi(A_i^*)$. Prenons $i \in \{1, \dots, n\}$. Le langage A_i est égal à $a_1^{s_1}(a_1^{t_1})^* \dots a_k^{s_k}(a_k^{t_k})^*$. Les mots ε et $w=a_1^{s_1} \dots a_k^{s_k}$ appartiennent à A_i^* et donc $B_i=\{\varepsilon\} \cup A_i w^*$ est un langage rationnel borné inclus dans A_i^*. Pour tout $y \in A_i^{p+1}$ avec $p \in \mathbf{N}$, il existe $y' \in A_i$ tel que $\psi(y)=\psi(y' w^p)$ donc $\psi(B_i)=\psi(A_i^*)$.

Supposons, maintenant, R inclus dans $w_1^* \dots w_k^*$ et considérons l'homomorphisme h défini sur $\{a_1, \dots, a_k\}$ par : $h(a_i)=w_i$, $\forall i \in \{1, \dots, k\}$. Le langage $R_1=h^{-1}(R) \cap a_1^* \dots a_k^*$ est un langage rationnel inclus dans $a_1^* \dots a_k^*$, donc il existe un langage rationnel borné $R_1' \subseteq R_1^*$ tel que $\psi(R_1')=\psi(R_1^*)$.

Le langage $R'=h(R_1')$ est un langage rationnel borné inclus dans $h(R_1^*)=R^*$ et vérifie $\psi(R')=\psi(R^*)$. □

Nous allons pouvoir en déduire un résultat analogue pour les langages appartenant à $\mathscr{C}$(COM) :

PROPOSITION 5 : *Pour tout langage* $L \in \mathscr{C}$(COM), *il existe des mots* $w_1^*, \dots, w_k^*$ *tels que* $\psi(L \cap w_1^* \dots w_k^*)=\psi(L)$.

Démonstration : Si $L \in \mathscr{C}$(COM), il existe un langage commutatif L', un langage rationnel R et deux homomorphismes h et g tels que $L=g(h^{-1}(L') \cap R)$ (*cf.* [2], [6]).

D'après le lemme précédent, il existe un langage rationnel $R' \subseteq x_1^* \dots x_k^* \cap R$ tel que $\psi(R')=\psi(R)$ et comme $h^{-1}(L')$ est un langage commutatif,

$$\begin{aligned}\psi(h^{-1}(L') \cap R') &= \psi(h^{-1}(L')) \cap \psi(R') \\ &= \psi(h^{-1}(L')) \cap \psi(R)=\psi(h^{-1}(L') \cap R) \quad (cf.\ [4]).\end{aligned}$$

Alors,

$$\psi(L)=\psi(L'') \qquad \text{avec} \quad L''=g(h^{-1}(L') \cap R') \subseteq w_1^* \dots w_k^*$$

où

$$\forall i \in \{1, \dots, k\}, \quad w_i=g(x_i).$$

Donc $L'' \subseteq L \cap w_1^* \ldots w_k^* \subseteq L$, ce qui implique :

$$\psi(L'') \subseteq \psi(L \cap w_1^* \ldots w_k^*) \subseteq \psi(L) = \psi(L'')$$

et

$$\psi(L \cap w_1^* \ldots w_k^*) = \psi(L). \quad \square$$

Cette proposition nous permet, par exemple, de montrer que le langage $L = \{(a^n b)^p / n, p \geqq 1\}$ n'appartient pas à $\mathscr{C}$(COM). En effet, il est clair que L n'est pas un langage semi-linéaire. Par contre, nous allons montrer que pour tout $w_1, \ldots, w_k \in \{a, b\}^*$, $L' = L \cap w_1^* \ldots w_k^*$ est un langage semi-linéaire. Posons

$$A = \{z \in \{a, b\}^* / lg_b(z) > k\} \text{ et } \overline{A} = \{a, b\}^* \setminus A.$$

Alors, il est facile de vérifier que $L' \cap A$ est un langage rationnel. D'autre part $L' \cap \overline{A}$ est égal à $L'_1 \cap w_1^* \ldots w_k^*$ où

$$L'_1 = \{(a^n b)^p / n \geqq 1,\ 1 \leqq p \leqq k\}.$$

Il est clair que $\mathscr{C}(L'_1)$ ne contient que des langages semi-linéaires. Donc

$$L' = (L' \cap A) \cup (L'_1 \cap w_1^* \ldots w_k^*)$$

est un langage semi-linéaire.

Étant donné que $\mathscr{C}$(COM) est égal au plus petit cône rationnel contenant les langages bornés et clos par intersection [4], la proposition 5 reste *a fortiori* vraie si on remplace, dans l'énoncé, la famille COM par la famille $\mathscr{B}$ des langages bornés. Cette proposition implique, en particulier, que tout langage infini appartenant à $\mathscr{C}$ (COM) contient un langage borné infini. Il est clair que si $\mathscr{L}_1$ et $\mathscr{L}_2$ sont deux cônes rationnels vérifiant cette propriété, $\mathscr{L}_1 \square \mathscr{L}_2 = \{s(L)/L \in \mathscr{L}_1$ et s est une $\mathscr{L}_2$-substitution$\}$ vérifie encore cette propriété et nous obtenons, par induction :

COROLLAIRE 6 : *Si L est un langage infini appartenant à $\mathscr{F}_\sigma$(COM), le plus petit cône rationnel clos par substitution et contenant les langages commutatifs, alors L contient un langage borné infini.*

Des propositions 2, 3 et du corollaire précédent, nous pouvons déduire :

COROLLAIRE 7 : *Soit L un langage de $\mathscr{F}_\sigma$(COM). Si L est le langage d'un mot infini, ou si L est un langage semi-linéaire ayant la propriété de préfixe, alors L est un langage rationnel.*

Considérons, maintenant, la famille des DOL-langages, c'est-à-dire des langages de la forme $\{h^i(w)/i \in \mathbf{N}\}$ où $w \in X^*$, h est un homomorphisme de X^* dans X^* et h^i est défini par induction au moyen des relations $h^0(x) = x$, $\forall x \in X^*$ et $\forall j \in \mathbf{N}$, $h^{j+1} = h \circ h^j$ (*cf.* [3]). Tout langage défini sur un alphabet d'une lettre est commutatif, donc appartient à $\mathscr{F}_\sigma$(COM). Par contre, le corollaire 7 va nous permettre de montrer qu'il existe un DOL-langage défini sur un alphabet de deux lettres, n'appartenant pas à $\mathscr{F}_\sigma$(COM). Prenons, en effet, $X=\{a, b\}$, $w=a$ et $L=\{h^i(w)/i \in \mathbf{N}\}$ où h est défini sur X par $h(a)=ab$, $h(b)=ba$. Si L appartient à $\mathscr{F}_\sigma$(COM), le langage $L_1=\mathrm{Init}(L) \cap (X^2)^*$ appartient encore à $\mathscr{F}_\sigma$(COM). Or, le langage L_1 est un langage semi-linéaire, ayant la propriété de préfixe et non rationnel [1]. Le corollaire 7 entraîne une contradiction et nous obtenons :

COROLLAIRE 8 : *La famille des* DOL-*langages n'est pas incluse dans* $\mathscr{F}_\sigma$(COM).

REMERCIEMENTS

Je remercie A. Arnold pour les discussions que nous avons eues sur ce sujet.

BIBLIOGRAPHIE

1. R. V. BOOK, *On Languages with a Certain Prefix Property*, Math. Syst. theory, 10, 1977, p. 229-237.
2. S. GINSBURG et S. A. GREIBACH, *Abstract families of Languages*, in *Studies in Abstract families of Languages*, Memoirs Amer. Math. Soc., 87, 1969, p. 1-32.
3. G. T. HERMAN et G. ROZENBERG, *Developmental Systems and Languages*, North Holland Publishing Company, Amsterdam, 1975.
4. M. LATTEUX, *Cônes rationnels commutativement clos*, R.A.I.R.O. Informatique théorique, vol. 11, 1977, p. 29-51.
5. M. LATTEUX, *Une note sur la propriété de préfixe*, Math. Syst. theory (à paraître).
6. M. NIVAT, *Transductions des langages de Chomsky*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, vol. 18, 1968, p. 339-455.
7. M. NIVAT, *Mots infinis engendrés par une grammaire algébrique*, R.A.I.R.O. Informatique théorique, vol. 11, 1977, p. 311-327.