

# RAIRO

## INFORMATIQUE THÉORIQUE

F. RODRIGUEZ

### **Note sur la non-principalité de certaines FAL**

*RAIRO – Informatique théorique*, tome 12, n° 3 (1978), p. 181-184.

[http://www.numdam.org/item?id=ITA\\_1978\\_\\_12\\_3\\_181\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ITA_1978__12_3_181_0)

© AFCET, 1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « RAIRO – Informatique théorique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques*

<http://www.numdam.org/>

## NOTE SUR LA NON-PRINCIPALITÉ DE CERTAINES FAL (\*)

par F. RODRIGUEZ (<sup>1</sup>)

Communiqué par J. BERSTEL

---

Résumé. — *Nous donnons une condition suffisante pour qu'un cône rationnel soit principal si et seulement si la FAL engendrée est principale. Ce résultat nous permet de simplifier certaines preuves et de démontrer la non-principalité de nouvelles FAL.*

Dans cette note nous donnons une condition suffisante pour que, étant donné un cône rationnel  $\mathcal{L}$ , la propriété suivante soit vérifiée :  $\mathcal{L}$  est principal si et seulement si  $\mathcal{F}(\mathcal{L})$  la famille agréable de langages engendrée par  $\mathcal{L}$  (FAL en abrégé, full AFL en anglais [4]) est principale.

Rappelons que si  $\mathcal{L}$  est une famille de langages, alors  $\mathcal{C}(\mathcal{L})$  est le cône rationnel engendré par  $\mathcal{L}$ , i. e. la plus petite famille contenant  $\mathcal{L}$ , fermée par homomorphisme, homomorphisme inverse et intersection avec un langage rationnel (« regular » en anglais),  $\mathcal{F}(\mathcal{L})$  est la FAL engendrée par  $\mathcal{L}$ , i. e. la fermeture rationnelle de  $\mathcal{C}(\mathcal{L})$  [4]. S'il existe un langage  $L$  tel que  $\mathcal{C}(\mathcal{L}) = \mathcal{C}(\{L\})$  [resp.  $\mathcal{F}(\mathcal{L}) = \mathcal{F}(\{L\})$ ] le cône rationnel  $\mathcal{C}(\mathcal{L})$  [resp.  $\mathcal{F}(\mathcal{L})$ ] est dit principal [5].

Dans la suite  $Rat$  désignera la famille des langages rationnels ("regular languages") et  $Rat$  l'opérateur de fermeture rationnelle, i. e. pour toute famille de langages  $\mathcal{L}$ ,  $\mathcal{F}(\mathcal{L}) = Rat \mathcal{C}(\mathcal{L})$ .

Notre résultat, dont S. Greibach donne un cas particulier dans [7], repose sur une propriété de certaines opérations sur les langages. Cette propriété est vérifiée par la plupart des opérations considérées à ce jour pour caractériser des familles de langages classiques, pour construire des cônes rationnels non principaux ou pour démontrer que la fermeture par ces opérations de certaines familles est non principale (chevron et crochet de [1], crochet ouvert de [9], opérations « syntactiques » de S. Greibach [7], . . .). Notre résultat permet donc de conclure à la non-principalité des FAL engendrées par ces cônes rationnels.

---

(\*) Reçu novembre 1977, révisé février 1978.

(<sup>1</sup>) E.N.S.E.E.I.H.T., Toulouse, Université Paul-Sabatier, Toulouse.

Nous simplifions ainsi les preuves de quelques résultats connus et nous montrons également que deux nouvelles FAL sont non principales.

DÉFINITION : Soit  $t$  une opération  $n$ -aire ( $n \geq 1$ ) sur les langages,  $t$  est *contrainte* par l'opérateur *Rat* si pour tous langages  $L_1, L_2, \dots, L_n$  sur des alphabets disjoints deux à deux et pour tout cône rationnel  $\mathcal{L}$  fermé par union, la condition

$$t(L_1, L_2, \dots, L_n) \in \text{Rat } \mathcal{L},$$

implique qu'il existe  $i, 1 \leq i \leq n$ , tel que  $L_i \in \mathcal{L}$ .

*Exemples* : 1° Soit  $X = \{a, b\}$  un ensemble disjoint de l'alphabet d'un langage  $L$ . Les opérations unaires ci-dessous sont contraintes par *Rat* :

– le chevron de  $L$  [2], défini par

$$\text{ch}(L) = \{a^n l b^n \mid l \in L, n \in \mathbf{N}\};$$

– le crochet de  $L$  [1], défini par

$$[L] = \{w l \tilde{w} \mid l \in L, w \in X^*\},$$

où  $\tilde{w}$  désigne l'image miroir de  $w$ ;

– le crochet ouvert de  $L$  [9], défini par

$$CO(L) = \{w l w \mid l \in L, w \in X^*\}.$$

2° Les opérations binaires « syntactiques » de S. Greibach [7] sont également contraintes par *Rat*, notamment l'*insertion* définie par  $i(L_1, L_2) = \{x f y \mid x y \in L_1, f \in L_2\}$ .

Notre résultat s'énonce ainsi :

THÉORÈME : Soit  $\mathcal{L}$  un cône rationnel fermé par union et par une opération  $t$  contrainte par *Rat*. Alors  $\mathcal{L}$  est principal si et seulement si la FAL  $\mathcal{F}(\mathcal{L})$  est principale.

*Démonstration* : Si  $\mathcal{L}$  est un cône rationnel principal, on sait que la FAL  $\mathcal{F}(\mathcal{L})$  est principale [5].

Réciproquement, si  $\mathcal{F}(\mathcal{L}) = \mathcal{F}(L_0)$  pour quelque  $L_0 \in \mathcal{F}(\mathcal{L})$ , alors puisque  $\mathcal{L}$  est fermé par union, il existe un langage  $M \in \mathcal{L}$  tel que  $L_0 \in \mathcal{F}(M)$ . Soit alors  $L$  un langage quelconque de  $\mathcal{L}$ ,  $L_1, \dots, L_n$  des copies de  $L$  sur des alphabets disjoints deux à deux. Comme  $\mathcal{L}$  est fermé par  $t$ , on a

$$t(L_1, \dots, L_n) \in \mathcal{L} \subseteq \mathcal{F}(\mathcal{L}) = \text{Rat } \mathcal{C}(M).$$

Or  $t$  est contrainte par  $Rat$ , donc il existe  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , tel que  $L_i \in \mathcal{C}(M)$ , i. e.  $L \in \mathcal{C}(M)$  et donc, puisque  $M \in \mathcal{L}$  on a  $\mathcal{L} = \mathcal{C}(M)$ .  $\square$

APPLICATIONS : 1° Ce théorème permet de simplifier, par exemple la preuve de M. Latteux dans [8] pour établir la non-principalité de la FAL engendrée par le plus petit cône rationnel commutativement clos. Rappelons que si  $X = \{a_1, \dots, a_p\}$  est un alphabet et si, pour tout mot  $w \in X^*$ ,  $|w|_{a_i}$  désigne le nombre d'occurrences de la lettre  $a_i$  dans  $w$ , l'application  $\Psi$  de  $X^*$  dans  $\mathbb{N}^p$  est une fonction de Parikh si pour tout  $w \in X^*$  :

$$\Psi(w) = (|w|_{a_1}, \dots, |w|_{a_p}),$$

Étant donnée une fonction de Parikh  $\Psi$  quelconque, la fermeture commutative d'un langage  $L$  est l'ensemble  $c(L) = \Psi^{-1} \circ \Psi(L)$ , autrement dit l'ensemble des mots que l'on peut obtenir par permutation à partir des mots de  $L$ . On dit alors qu'une famille de langages  $\mathcal{L}$  est commutativement close si  $c(L) \in \mathcal{L}$  pour tout  $L \in \mathcal{L}$ . Dans [8], M. Latteux établit tout d'abord que  $\mathcal{L}_\Psi$ , le plus petit cône rationnel commutativement clos, est non principal et fermé par insertion, puis, par une argumentation assez complexe, il montre que la FAL engendrée par ce cône est non principale. Or, d'après notre théorème ce second résultat découle immédiatement du premier puisque l'opération insertion est contrainte par  $Rat$  (exemple 2, ci-dessus).

2° Boasson, Crestin et Nivat montrent dans [1] que Ult la famille des langages ultralinéaires [6] et Qrf la famille des langages fortement quasi-rationnels [3] sont respectivement le plus petit cône rationnel fermé par union, produit, crochet et la plus petite FAL fermée par crochet. Ils démontrent que ce cône et cette FAL sont non principaux. Notre théorème permet donc de conclure que  $Rat$  Ult est une FAL non principale. Comme Ult est un cône rationnel fermé par une opération contrainte par  $Rat$  et que Ult n'est pas une FAL il résulte, en outre, d'un théorème de [10] que  $Rat$  Ult est strictement inclus dans Qrf.

Boasson, Crestin et Nivat considèrent également  $\mathcal{C}_1$  le plus petit cône rationnel fermé par union, produit et chevron et  $\mathcal{F}_1$  la plus petite FAL fermée par chevron et démontrent leur non-principalité. Il résulte alors de notre théorème et de [10] que  $Rat \mathcal{C}_1$  est une FAL non principale telle que :

$$\mathcal{C}_1 \not\subseteq Rat \mathcal{C}_1 \not\subseteq \mathcal{F}_1.$$

## BIBLIOGRAPHIE

1. L. BOASSON, J. P. CRESTIN et M. NIVAT, *Familles de langages translatables et fermées par crochet*, Acta Informatica, vol. 2, 1973, p. 383-393.

2. L. BOASSON et M. NIVAT, *Sur diverses familles fermées par transduction rationnelle*, Acta Informatica, vol. 2, 1973, p. 180-188.
3. J. P. CRESTIN, *Sur un langage quasi-rationnel d'ambiguïté non bornée*, Thèse 3<sup>e</sup> cycle, Toulouse, 1967.
4. S. GINSBURG et S. GREIBACH, *Abstract Families of languages*, Memoirs Amer. Math. Soc., vol. 87, 1969, p. 1-32.
5. S. GINSBURG et S. GREIBACH, *Principal AFL*, J. Comp. and System Sciences, 1970, p. 308-338.
6. S. GINSBURG et E. SPANIER, *Finite Turn Push-Down Automata*, S.I.A.M. Journal Control, 1966, p. 429-453.
7. S. GREIBACH, *Syntactic Operators on Full Semi-AFLs* J. Comp. and System Sciences, vol. 6, 1972, p. 30-76.
8. M. LATTEUX, *Cônes rationnels commutativement clos*, R.A.I.R.O. Inform. théorique, vol. 11, n° 1, 1977, p. 29-51.
9. F. RODRIGUEZ, *Familles de langages fermées par crochet et crochet ouvert in 3<sup>rd</sup> GI Conference on Theoretical Computer Science*, Lecture Notes in Computer Science, vol. 48, 1977, p. 154-168.
10. F. RODRIGUEZ, *Opérateurs contraints et opérateurs de degré  $p$* , soumis à communication.