

RAIRO

INFORMATIQUE THÉORIQUE

L. BOASSON

A. RESTIVO

Une caractérisation des langages algébriques bornés

RAIRO – Informatique théorique, tome 11, n° 3 (1977), p. 203-205.

http://www.numdam.org/item?id=ITA_1977__11_3_203_0

© AFCET, 1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « RAIRO – Informatique théorique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

UNE CARACTÉRISATION DES LANGAGES ALGÈBRIQUES BORNÉS (*)

par L. BOASSON ⁽¹⁾ et A. RESTIVO ⁽²⁾

Communiqué par J. F. Perrot

Résumé. — *Le second auteur a récemment donné une caractérisation des langages rationnels bornés, laquelle ne s'étend pas au cas algébrique. Nous donnons ici une caractérisation des langages algébriques bornés qui est analogue à la précédente et ne s'étend pas au cas "Context-Sensitive"*

Étant donné un alphabet X , suivant [4], nous désignons par L_k le langage

$$L_k = \{ f \mid \forall u, v, w \in X^*, f = uv^k w \Rightarrow v = 1 \}.$$

Nous noterons $F(L)$ le langage constitué des facteurs du langage L , soit $F(L) = \{ v \mid \exists u, w \in X^* \text{ tels que } uvw \in L \}$. Dans [4], il est établi qu'un langage rationnel L est borné si et seulement si il vérifie la condition

$$(B) : L \cap L_k \text{ est fini pour tout entier } k.$$

Il y est aussi montré que ce résultat ne tient plus dès que L est un langage algébrique non rationnel. Notre but est de vérifier la

PROPOSITION : *Le langage algébrique L est un langage borné si et seulement si il vérifie*

$$(\overline{B}) : F(L) \cap L_k \text{ est fini pour tout entier } k.$$

Remarquons d'abord :

— que le langage défini sur l'alphabet $\{ x, y \}$ par

$$L = \{ x^{n_1} y x^{n_2} y \dots x^{n_p} y \mid p \geq 1 \text{ et } n_1 = n_2 = \dots = n_p \geq 1 \}$$

est "context-sensitive" et vérifie (\overline{B}) sans être borné, de sorte que la proposition n'est plus vraie si l'on supprime le caractère algébrique du langage considéré.

(*) Reçu en février 1977.

⁽¹⁾ UER de Mathématiques, Université de Picardie (Amiens) et Laboratoire Associé du CNRS Informatique Théorique et Programmation", Paris.

⁽²⁾ Istituto di Matematica dell'Università di Palermo et Unità di Ricerca GIFCO del CNR, Palermo.

– que la condition (\overline{B}) est plus forte que (B) et que, d'une certaine façon, il est établi dans [4] que si L est rationnel, alors (B) implique (\overline{B}) .

Avant d'établir la proposition, rappelons le

THÉORÈME : *Le langage engendré par la grammaire algébrique réduite $G = \langle X, V, P \rangle$ est borné si et seulement si G vérifie la condition*

$$(\overline{C}) \quad \forall S \in V, \quad S \xrightarrow{*} u_1 S v_1 \quad \text{et} \quad S \xrightarrow{*} u_2 S v_2 \quad \text{avec} \quad u_1, u_2, v_1, v_2 \in X^*$$

entraîne que u_1 et u_2 (resp. v_1 et v_2) sont puissances d'un même mot.

(Nous utilisons ici les notations de [1] pour les grammaires et les dérivations.) Ce résultat est une reformulation du Théorème 5.1 de [2] utilisant la condition équivalente à (\overline{C}) :

$\forall S \in V, \quad \exists d_S \quad \text{et} \quad g_S \in X^*$ tels que si $S \xrightarrow{*} f_1 g_S f_2$ avec $f_1, f_2 \in X^*$, alors $f_1 \in g_S^*$ et $f_2 \in d_S^*$.

Nous pouvons alors donner la preuve de la proposition. Notons d'abord que le caractère nécessaire de la condition (\overline{B}) est immédiat. Il nous suffit d'établir que si un langage algébrique vérifie (\overline{B}) , il est borné, ce qui résulte du théorème donné ci-dessus et du

LEMME : *Si le langage algébrique L engendré par la grammaire algébrique réduite G vérifie la condition (\overline{B}) , alors G vérifie la condition (\overline{C}) .*

Preuve du lemme : Supposons que la grammaire $G = \langle X, V, P \rangle$ ne vérifie pas (\overline{C}) . On peut alors trouver une variable $S \in V$, deux mots w_1 et w_2 qui ne soient pas puissances d'un même troisième, tels que :

$$\text{soit} \quad S \xrightarrow{*} u_1 S w_2 \quad \text{et} \quad S \xrightarrow{*} u_2 S w_2$$

$$\text{soit} \quad S \xrightarrow{*} w_1 S v_1 \quad \text{et} \quad S \xrightarrow{*} w_2 S v_2.$$

On sait en particulier que w_1 et w_2 engendrent librement le monoïde $\{w_1, w_2\}^*$. (Ce résultat a été retrouvé de nombreuses fois ; voir [3] par exemple). Ceci signifie que l'homomorphisme α de X^* dans $\{x, y\}^*$ défini par $\alpha(x) = w_1$ et $\alpha(y) = w_2$ est un monomorphisme [3]. Considérant un mot h sans cube sur $\{x, y\}^*$, on a

- $h \in L_3$ et donc $\alpha(h) \in L_{3m}$ avec $m = \max(|w_1|, |w_2|)$ (lemme 2 de [4]);
- $\alpha(h) \in F(L)$ puisque G est réduite;
- $|\alpha(h)| \geq h$.

Sachant que L_3 est infini, on trouve que $F(L) \cap L_{3m}$ est infini, ce qui viole la condition (\overline{B}) .

BIBLIOGRAPHIE

1. S. GINSBURG, *The Mathematical Theory of Context-Free Languages*. McGraw Hill, 1966.
2. S. GINSBURG and E. H. SPANIER, *Bounded Algol-Like Languages*. Trans. American Math. Soc., 113, 1964, p. 333-368.
3. J. F. PERROT, *Informatique et Algèbre : la Théorie des Codes à Longueur variable*, in Theoretical Computer Science, 3rd GI Conférence, Lectures Notes in Computer Science n° 48, 1977, p. 27-44.
4. A. RESTIVO, *Mots sans Répétitions et Langages Rationnels Bornés* (article précédent de ce même fascicule).