REVUE FRANÇAISE D'AUTOMATIQUE, INFORMATIQUE, RECHERCHE OPÉRATIONNELLE. INFORMATIQUE THÉORIQUE

J.-C. BERMOND

Y. KODRATOFF

Une heuristique pour le calcul de l'indice de transitivité d'un tournoi

Revue française d'automatique, informatique, recherche opérationnelle. Informatique théorique, tome 10, nº R1 (1976), p. 83-92.

<http://www.numdam.org/item?id=ITA_1976__10_1_83_0>

R.A.I.R.O. Informatique Théorique
(vol. 10, n° 3, mars 1976, p. 83 à 92)

UNE HEURISTIQUE POUR LE CALCUL DE L'INDICE DE TRANSITIVITÉ D'UN TOURNOI (*)

par J.-C. BERMOND (1) et Y. KODRATOFF (2)

Communiqué par R. CORI

Résumé. — *Nous nous proposons de calculer le nombre d'arcs d'un tournoi donné qu'il faut renverser pour obtenir un tournoi transitif. Toute valeur exacte exige un temps de calcul très long, aussi préférons-nous choisir à l'avance un temps de calcul maximal et trouver les résultats optimaux compatibles avec cette contrainte. Nous utilisons nos programmes pour établir une conjecture en théorie des tournois.*

0. INTRODUCTION

L'objet de cet article est de donner une heuristique pour déterminer un paramètre (l'indice de transitivité d'un tournoi) qui intervient à la fois en théorie des comparaisons par paires [7] où il a été introduit par Slater [13] et d'autre part en théorie des graphes (tournois) où il a été introduit par Erdös et Moon [5] (pour plus de détails, *voir* [4]).

Plus précisément, on veut classer un ensemble de n objets en les comparant deux à deux, toutes les paires possibles étant envisagées. On représente ces comparaisons par un tournoi à n sommets x_i (représentant les objets) et où (x_i, x_j) est un arc du tournoi si l'objet x_i est préféré à l'objet x_j (rappelons qu'un tournoi $T = (X, U)$ est un graphe orienté dans lequel deux sommets x_i et x_j de X sont joints par un et un seul arc de U, (x_i, x_j) ou (x_j, x_i). On posera $x_i > x_j$ si l'arc (x_i, x_j) existe). Un tournoi est dit transitif si $x_i > x_j$ et $x_j > x_k$ implique $x_i > x_k$ (pour plus de détails sur les tournois et les graphes, *voir* [9], [2] et [12]). Un tel tournoi correspond à un ordre total et, dans le cas d'une expérience de comparaison par paires, à un classement « parfaitement logique » (et unique). Dans la pratique, les résultats d'une telle expérience donnent rarement un tournoi transitif, il est donc intéressant d'avoir une idée de la « distance » à un tournoi transitif. Définissons une distance sur

(*) Reçu mars 1975.
(1) Institut de Programmation, Tour 55-65, Paris.
(2) Centre de Mathématiques sociales, Paris.

les tournois ayant le même ensemble de sommets X, ($|X| = n$); $d(T_n, T'_n)$ est égale au nombre de couples (x_i, x_j) tels que $x_i > x_j$ dans T_n et $x_j > x_i$ dans T'_n. Si on désigne par O_n un tournoi transitif à n sommets, posons

$$i(T_n) = \min_{On} d(O_n, T_n);$$

$i(T_n)$ est le nombre minimal d'arcs dont il faut changer l'orientation dans T_n pour obtenir un tournoi transitif. Si O_n est tel que $d(O_n, T_n) = i(T_n)$ on dira que O_n est associé à T_n (il représente un classement optimal au sens de la distance ci-dessus). $i(T_n)$ est aussi le nombre minimal d'arcs qu'il faut supprimer pour obtenir un graphe sans circuits.

Notre but est de donner une procédure de calcul du paramètre $i(T_n)$ et, éventuellement, de déterminer les tournois transitifs associés à T_n. Pour cela, nous rappelons en 1 quelques propriétés que nous aurons à utiliser; nous décrivons en 2 les arborescences qui interviennent dans la procédure de calcul et en 3 les fonctions d'évaluation attachées à cette procédure. Enfin, en 4, nous donnons les résultats numériques ainsi obtenus; ceux-ci nous permettent de démontrer une conjecture due à Kotzig [8] en théorie des tournois.

1. NOTATIONS ET RAPPEL DE QUELQUES PROPRIÉTÉS DES TOURNOIS

1.1. Dans un tournoi T, on note par $d_T^+(x)$ [resp. $d_T^-(x)$] le demi-degré extérieur (resp. intérieur) du sommet x dans T, c'est-à-dire le nombre de sommets x_j tels que $x > x_j$ (resp. $x < x_j$). Si T a n sommets, on a $d_T^+(x) + d_T^-(x) = n-1$ pour tout x de X.

1.2. Remarque

On pourrait penser que si O_n $(x_0 > x_1 > \ldots > x_{n-1})$ est un tournoi transitif associé à T_n, x_0 est un des sommets de plus haut demi-degré extérieur d^+ dans T ou que, d'une manière générale, x_i est un des sommets de plus haut d^+ dans le sous tournoi de T engendré par les points $x_i, \ldots, x_{n-1}$.

En fait il n'en est rien et il peut même n'exister aucun tournoi transitif O_n associé à T_n ayant la propriété ci-dessus comme le montre l'exemple suivant [4]:

Exemple : Soit le tournoi T_7 :

$$1 > 2, 3, 5, 6, 7, \quad 2 > 3, 5, 7, \quad 3 > 4, 5, 7,$$
$$4 > 1, 2, 5, 6, \quad 5 > 6, 7, \quad 6 > 2, 3, 7, \quad 7 > 4.$$

On a $d(T_7, O_7) = 3$ pour $O_7 = (4 > 1 > 6 > 2 > 3 > 5 > 7)$.

Or, pour tout tournoi O'_7 dont le sommet le plus grand est 1, on vérifie que $d(T_7, O'_7) \geqq 4$.

1.3. Propriétés

Les démonstrations de ces propriétés peuvent être trouvées dans [4] et [9].

1.3.1. $i(T) = \min_{x_i \in X} \{ i(T - \{ x_i \}) + d^-(x_i) \}$.

1.3.2. Si x_0 est le sommet le plus grand dans un tournoi transitif O_n associé à T_n alors $d^+_{T_n}(x_0) \geqq [n/2]$ soit $d^-_{T_n}(x_0) \leqq [(n-1)/2]$, ($[x]$ désigne le plus grand entier inférieur ou égal à x).

1.3.3. Si O_n $(x_0 > x_1 > \ldots > x_{n-1})$ est un tournoi transitif associé à T_n on a, pour tout i, $x_i > x_{i+1}$ dans T_n ce qui revient à dire que $(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$ est un chemin hamiltonien de T_n.

2. CONSTRUCTION DES ARBORESCENCES (remarques sur le calcul)

2.1. Procédure

Le calcul se présente sous la forme du parcours d'arborescences. Pour diminuer le temps de calcul, nous avons utilisé une méthode classique de cheminement dans les arborescences (*voir*, par exemple, [11]) qui consiste à partir des branches pendantes (de niveau n) pour aller vers la racine (de niveau 0), ce qui évite de répéter les calculs relatifs aux niveaux d'ordre supérieur à j lorsqu'on parcourt l'arborescence partant d'un sommet de niveau j.

De plus, pour ne pas parcourir tous les chemins de l'arborescence, nous avons utilisé des fonctions d'évaluation liées à la nature de notre problème, elles seront décrites plus loin en 3.1 et 3.3.

Ce genre de procédure par évaluation et séparation séquentielle (P.S.E.S.) est décrit par B. Roy [11].

2.2. Description de l'arborescence

Soit $T_n = (X_n, U)$ un tournoi. Chacun des sommets de l'arborescence est l'image d'un sommet du tournoi. L'arborescence se construit à partir des propriétés 1.3.

On choisit un sommet origine (il y aura donc autant d'arborescences que de sommets origine). Les successeurs d'un sommet x_j sont les sommets x_k non encore rencontrés dans l'unique chemin joignant la racine à ce sommet et tel que $x_j > x_k$. Un chemin allant de la racine à un sommet pendant représente un ordre total. Plus précisément, un chemin de l'arborescence est formé de la manière suivante.

Son sommet x_0, de niveau zéro, est un des sommets de X_n vérifiant $d^-_{T_n}(x_0) \leqq [(\mathrm{n}-1/2)]$. Un sommet x_1 est de niveau 1 s'il est un des sommets de $X_{n-1} = X_n - \{x_0\}$, vérifiant

$$x_0 > x_1 \qquad \text{et} \qquad d^-_{T_{n-1}}(x_1) \leqq \left[\frac{n-2}{2}\right],$$

où T_{n-1} est le sous-tournoi de T_n engendré par X_{n-1}. Un sommet x_j est de niveau j s'il est un des sommets de $X_{n-j} = X_{n-(j-1)} - \{x_{j-1}\}$, vérifiant

$$x_{j-1} > x_j \qquad \text{et} \qquad d^-_{T_{n-j}}(x_j) \leqq \left[\frac{n-j-1}{2}\right],$$

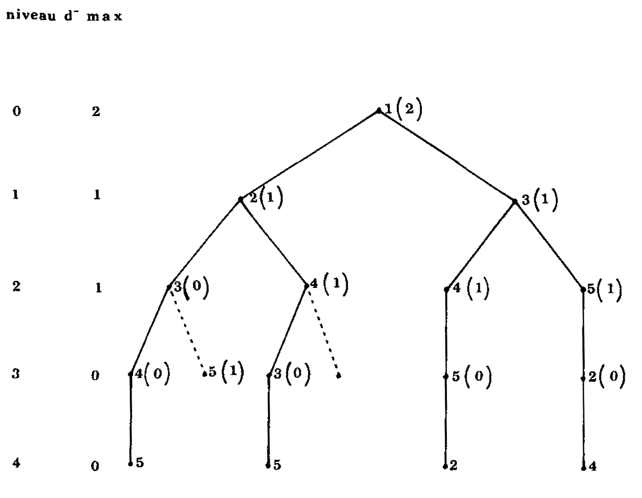
où T_{n-j} est le sous-tournoi de T_n engendré par X_{n-j}.

Pour le chemin représentant le tournoi transitif $O_n = (x_0 > x_1 \ldots > x_{n-1})$, on calcule $d(T_n, O_n)$ par la formule : $\sum\limits_{0 \leqq j \leqq n-3} d^-_{T_{n-j}}(x_j)$ en effet,

$$d^-_{T_2}(x_{n-2}) = d_{T_1}(x_{n-1}) = 0$$

car $x_{n-2} > x_{n-1}$. On obtient $i(T_n)$ par

$$i(T_n) = \min(d(T_n, O_n)).$$



Figure

Le nombre entre parenthèses est la valeur de d^- associée au sommet. Le tournoi transitif $1 > 2 > 3 > 5 > 4$ est interdit parce que la valeur de d^- (5) au niveau 3 est de 1 alors que $[(n-3-1)/2] = 0$, il n'est donc pas associé à T_5.

Les chemins $1 > 2 > 3 > 4 > 5$, $1 > 2 > 4 > 3 > 5$, $1 > 3 > 4 > 5 > 2$, $1 > 3 > 5 > 2 > 4$ ont pour valeurs de $\Sigma\, d^-$ respectivement 3, 4, 4, 4 et la valeur $i(T)$ est donc inférieure ou égale à 3.

Les sommets jouant le même rôle, on a $i(T) = 3$.

2.3. Exemple

Soit T_5 à cinq sommets avec $x_i > x_j$ si $j-i \equiv 1$ ou 2 modulo 5 le tournoi est défini par

$$1 > 2{,}3, \quad 2 > 3{,}4, \quad 3 > 4{,}5, \quad 4 > 1{,}5, \quad 5 > 1{,}2,$$

ce qui implique

$$1 < 4{,}5, \quad 2 < 1{,}5, \quad 3 < 1{,}2, \quad 4 < 2{,}3, \quad 5 < 3{,}4.$$

L'arborescence de sommet 1 se représente comme le montre la figure.

Tous les sommets jouant le même rôle, les quatre autres arborescences sont isomorphes à celles-ci.

2.4. Temps de calcul

Le nombre de chemins est de l'ordre de $n\,!/4^n$ du fait qu'à chaque niveau, environ 1/4 des sommets sont concurrents à participer au niveau suivant à cause des conditions 1.3 et donc le nombre d'opérations complètes à réaliser est de $n.\,n\,!/4^n$ ce qui, en principe, interdit de travailler sur des tournois d'ordre élevé [à titre d'exemple, le tournoi T_{17} que nous verrons plus tard a demandé 2 h de calculs à une machine IBM 360-165 pour trouver de la sorte $i(T_{17}) = 47$].

Bien entendu, on peut diminuer le temps de calcul, en remarquant que chaque chemin des arborescences conduit à un majorant de $i(T_n)$ donc, si à un niveau j la somme $\sum_{0 \leqq i \leqq j} d^-_{T_{n-i}}(x_i)$ est supérieure à la borne déjà obtenue, il est inutile de continuer l'arborescence.

3. FONCTIONS D'ÉVALUATION

3.1. Obtention de la valeur exacte de $i(T_n)$: première fonction d'évaluation

Le principe est d'estimer en un sommet donné le minimum de la contribution à $i(T_n)$ des chemins x issus de ce sommet ce qui va nous permettre d'éliminer, à partir de ce sommet, certains chemins.

A chaque sommet x_{j-1}, on peut déterminer un minorant pour

$$\sum_{j \leqq i \leqq n-3} d^-_{T_{n-i}}(x_i)$$

de la manière suivante.

Rangeons les demi-degrés intérieurs d^- des sommets de T_{n-j} par ordre non décroissant, soit $\alpha_0 \leqq \alpha_1 \leqq \ldots \leqq \alpha_{n-j-1}$.

On a

$$d^-_{T_{n-j}}(x_j) \geqq \alpha_0,$$

$$d^-_{T_{n-j}}(x_j) + d^-_{T_{n-(j+1)}}(x_{j+1}) \geqq \alpha_0 + \max(\alpha_1 - 1, 0).$$

En effet, $d^-_{T_{n-(j+1)}}(x_{j+1}) \geqq d^-_{T_{n-j}}(x_{j+1}) - 1$.

D'une manière générale, on a

$$\sum_{j \leqq i \leqq n-3} d^-_{T_{n-i}}(x_i) \geqq \sum_{0 \leqq k \leqq n-j-3} \max(\alpha_k - k, 0).$$

On en déduit un minorant pour les $d(T_n, O_n)$ où O_n est un chemin commençant par $x_0 > x_1 > \ldots > x_{j-1}$ qui a la valeur

$$\sum_{0 \leqq i \leqq j-1} d_{T_{n-i}}(x_i) + \sum_{0 \leqq k \leqq n-j-3} \max(\alpha_k - k, 0).$$

Dès que cette somme est supérieure au majorant déjà obtenu il est inutile de continuer l'arborescence.

3.2. Remarque

Enfin, dans le cas où il est trop long d'obtenir la valeur exacte de $i(T_n)$, on a un majorant en parcourant seulement quelques chemins des arborescences (par exemple, soit en prenant à chaque niveau des points de d^- les plus petits, soit en utilisant la remarque du paragraphe suivant).

3.3. Obtention d'un minorant de $i(T_n)$: deuxième fonction d'évaluation

3.3.1. DÉFINITION : $c(T_n)$ désigne le nombre maximal de circuits deux à deux disjoints (au sens des arcs) de T_n.

3.3.2. PROPOSITION : $i(T_n) \geqq c(T_n)$ (*voir* la preuve dans [4], § 2-4).

3.3.3. *Calcul de* $c(T_n)$ (*fonction d'évaluation*)

Nous n'avons cherché qu'un ensemble particulier (lié à l'ordre de numérotation arbitraire des sommets) de 3-circuits et de 4-circuits deux à deux disjoints, leur nombre sera noté : $p(T_n)$. Dans ces conditions, le nombre obtenu est en général trop faible pour être intéressant. Pour l'améliorer, nous parcourons quelques niveaux des arborescences décrites au paragraphe 1 (en utilisant toutes les améliorations décrites dans le paragraphe) obtenant ainsi un $\sum d^-$ exact jusqu'au niveau $j-1$, puis, seulement ensuite, nous calculons $p(T_{n-j})$ pour le sous-tournoi T_{n-j} restant. Ceci permet d'optimiser la vitesse de calcul. En effet, il est inutile de fixer à l'avance la valeur de j. Si dès le niveau zéro, par exemple $d^-_{T_n}(x_0) + p(T_{n-1})$ est supérieur ou égal à un minorant déjà trouvé, il est inutile d'explorer plus loin l'arborescence et on peut passer directement au sommet de niveau 0 suivant. Par contre si $p(T_{n-j}) + \sum_{0 \leq i \leq j-1} d_{T_{n-i}}(x_i)$ reste inférieur au minorant, alors on doit explorer aussi le niveau j. Pour les tournois d'ordre élevé ceci est encore trop lent pour obtenir $i(T_n)$. Dans ces conditions, on se fixe un j au-delà duquel la valeur obtenue deviendra un nouveau minorant. Ceci permet d'obtenir le meilleur minorant possible de $i(T_n)$ pour un temps de calcul fixé à l'avance.

3.4. Temps de calcul

Le temps de calcul de $c(T_n)$ est du même ordre que celui de $i(T_n)$, c'est pourquoi nous n'avons pas cherché à le calculer exactement. Pour donner une idée de l'efficacité de l'heuristique, soulignons le cas du tournoi à vingt et un sommets décrit au paragraphe 3. En utilisant seulement la méthode du paragraphe 1, le temps de calcul est de l'ordre de $n!/2^n$ et nous avons dit que nous avions trouvé ainsi $i(T_{17}) = 47$ en 2 h de calcul. Il faut donc de l'ordre de $20 \times 19 \times 18/8$ fois plus de temps pour calculer l'indice de transivité du tournoi à vingt sommets déduit de T_{21}, soit de l'ordre de 2 000 h. En combinant les deux méthodes nous avons, dans ce cas particulier, obtenu en moins de 2 h un minorant et un majorant ayant la même valeur.

3.5. Remarque

On peut même espérer améliorer le majorant par cette méthode. Le fait que l'on atteigne la valeur la plus faible de $p(T_n)$ correspond souvent (il n'y a aucune raison, cependant, pour que ce soit toujours) au fait que le chemin parcouru dans l'arborescence est un de ceux qui conduisent à une valeur minimale de $i(T_n)$. Le dernier sommet de ce chemin peut être considéré comme le niveau zéro d'une arborescence portant sur $n-j$ sommets, que l'on peut alors parcourir en entier. Ceci ne permettra jamais d'être certain d'avoir obtenu la valeur exacte $i(T_n)$ mais permet d'abaisser son majorant.

4. APPLICATIONS

Nous avons utilisé cette méthode pour de nombreux tournois et, en particulier, nous avons pu améliorer les bornes connues sur la fonction $f(n) = \max_{T_n} i(T_n)$, où le maximum est pris sur tous les tournois à n sommets et, ainsi, prouver la validité d'une conjecture due à Kotzig [8] (problème posé aussi par D. H. Younger [15]).

4.1. THÉORÈME : *Si* $n \geqq 10$, $f(n) > \pi(n)$, *où* $\pi(n) = [n/3\,[(n-1/2)]]$ *est le nombre maximal de cycles deux à deux disjoints du graphe complet.*

Démonstration : Il est montré dans [3] qu'il suffit de prouver le théorème pour $10 \leqq n \leqq 25$.

C'est ce que nous avons fait avec les méthodes des paragraphes 2 et 3. Nous donnons les résultats obtenus pour des tournois nécessaires à la preuve du théorème.

a) *Tournois des résidus quadratiques notés* Q_n. Un tel tournoi est défini par $x_i > x_j$ si $j-i$ est congru à un carré modulo n. Un tel tournoi n'existe que si $n = p^\alpha$, où p est premier et p congru à 3 modulo 4, donc, en particulier, pour $n = 7, 11, 19, 23, \ldots$ L'intérêt de ces tournois est que tous les sommets jouent le même rôle (c'est-à-dire que les sous-tournois obtenus en enlevant un sommet quelconque sont tous isomorphes), ainsi que toutes les paires de sommets ce qui permet de se ramener à un tournoi à $n-2$ sommets.

(i) $n = 11$. Soit T_{10} le tournoi obtenu en enlevant un sommet quelconque de Q_{11}. Nous avons obtenu $i(T_{10}) = 15$ et donc $i(Q_{11}) = 20$ (résultats déjà donnés en [4]).

(ii) $n = 19$. Soit Q_{19} le tournoi des résidus quadratiques à 19 sommets, T_{18} un tournoi obtenu en supprimant un sommet quelconque de $d^- = 9$ et T_{17} un tournoi obtenu en supprimant de T_{18} un sommet tel que de $d^- = 8$ dans T_{18}.

Nous trouvons $i(T_{17}) = 47$ donc $i(T_{18}) = 55$ et $i(Q_{19}) = 64$. D'autre part, en enlevant un sommet de $d^- = 7$ à T_{17} on obtient un tournoi T_{16}, tel que $i(T_{16}) = 40$.

(iii) $n = 23$. Soit Q_{23} le tournoi des résidus quadratiques et T_{22} et T_{21} des sous-tournois de Q_{23} obtenus comme en *b*. Nous trouvons $69 \leqq i(T_{21}) \leqq 71$, d'où on en déduit $79 \leqq i(T_{22}) \leqq 81$ et $90 \leqq i(Q_{23}) \leqq 92$.

b) On peut obtenir à partir des Q_n des tournois à $(n-1)/2$ sommets de la manière suivante : soit T_{n-1} un tournoi obtenu en enlevant un sommet de Q_n (rappelons que tous les T_{n-1} ainsi obtenus sont isomorphes), on considère le sous tournoi de T_{n-1} engendré par les points de même demi-degré extérieur $d^+ = (n-1)/2$. On peut montrer que dans les $T_{(n-1)/2}$ obtenus, tous les sommets jouent le même rôle, ce qui permet d'appliquer le programme à un tournoi à $(n-3)/2$ sommets.

(i) $n = 15$. Soit T_{15} le tournoi ainsi engendré à partir de Q_{31}. On calcule $i(T_{14}) = 29$ donc $i(T_{15}) = 36$.

(ii) $n = 21$. Soit T_{21} le tournoi ainsi engendré à partir de Q_{43}, on trouve $i(T_{20}) \geqq 62$ (par la méthode du paragraphe 2) et $i(T_{20}) \leqq 62$ (par la méthode du paragraphe 1), donc $i(T_{20}) = 62$. Rappelons que les deux bornes ont été trouvées dans un temps de l'ordre de mille fois plus petit que celui qui aurait été nécessaire au calcul de $i(T_{20})$ par la méthode du paragraphe 1 seule.

On en déduit $i(T_{21}) = 72$.

c) Pour $n = 13$, le T_{13} utilisé était obtenu en ajoutant deux sommets à Q_{11}. On a trouvé $i(T_{12}) = 21$ et $i(T_{13}) = 27$.

d) Pour $n = 25$, nous avons utilisé un tournoi T_{25} communiqué par A. Astie [1] qu'on peut définir ainsi : l'ensemble des sommets

$$X = \{(i, j);\ 0 \leqq i \leqq 4,\ 0 \leqq j \leqq 4\} \qquad \text{et} \qquad (i, j) > (i', j')$$

si et seulement si $(i-i', j-j')$ appartient à S, où S est défini ainsi $S = \{(0, 1), (0, 2), (1, 0), (2, 0), (2, 1), (3,1), (3, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}$. Dans ce tournoi, tous les sommets jouent le même rôle, on a donc déterminé : $91 \leqq i(T_{24}) \leqq 103$ d'où $103 \leqq i(T_{25}) \leqq 115$.

Ceci complète la preuve du théorème 3.

n	3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13		14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25
$\Pi(n)$...	1 1 3 4 7 8 12 13 18 20 26		28 35 37 45 48 57 60 70 73 84 88 100
$f(n)$..	1 1 3 4 7 8 12 15 20 22 28	min. de $f(n)$.	31 38 40 47 55 64 64 72 80 91 91 103
		maj. de $f(n)$.	32 39 44 52 58 67 73 83 91 102 110 122

TABLEAU

4.2. Récemment J. Hardouin du Parc [6] a donné une autre méthode pour obtenir $i(T_n)$ et a trouvé des tournois T_{13}, T_{14}, T_{15} tels que : $i(T_{13}) = 28$; $i(T_{14}) = 31$ et $i(T_{15}) = 38$.

4.3. C. Thomassen [14] a prouvé la conjecture 2 de [3], d'où

$$f(pq) \geqq pf(q) + q^2 f(p) \qquad \text{et} \qquad f(pq+1) \geqq pf(q+1) + q^2 f(p).$$

On obtient en particulier pour $p = 11$ et $q = 2$, $f(22) \geqq 80$ et $f(23) \geqq 91$.

4.4. Nous rassemblons les résultats dans le tableau ci-dessus : les majorants sont ceux donnés en [4] ou de nouveaux obtenus par J. Hardouin du Parc [6].

BIBLIOGRAPHIE

1. A. Astie. Communication personnelle, 1975.
2. C. Berge. *Graphes et Hypergraphes*, Dunod, Paris, 1970.
3. J.-C. Bermond. *The Circuit Hypergraph of a Tournament*, Infinite and finite sets. Proc. Coll. Math. Soc. Jänos Bolyai, Keszthely, Hongrie, 1973, North-Holland, Amsterdam, vol. I, 1975, p. 165-180.
4. J.-C. Bermond. *Ordres à distance minimale d'un tournoi et graphes partiels sans circuits maximaux*. Math. Sc. Humaines, vol. 37, 1972, p. 5-25.
5. P. Erdös et J. W. Moon. *On Sets of Consistent Arcs in a Tournament*. Canad, Math. Bull., vol. 8, 1965, p. 269-271.
6. J. Hardouin du Parc. Math. Sc. Humaines, vol. 51, 1975, p. 35-41.
7. M. G. Kendall. *Rank Correlation Method.* 3e ed., New York, Hafner, 1962.
8. A. Kotzig. *On the Maximal Order of Cyclicity of Antisymetric Directed Graphs*. Discrete Math., vol. 12, 1975, p. 17-25.
9. J. W. Moon. *Topics on Tournaments*, Holt, New York, 1968.
10. R. Remage et W. A. Thompson. *Maximum Likelihood Paired Comparison Ranking*. Biometrika, vol. 53, 1966, p. 143-149.
11. B. Roy. *Algèbre moderne et théorie des graphes*, t. 2, Dunod, Paris, 1970.
12. A. Sache. *La théorie des graphes*. P.U.F. coll. *Que sais-je?*, Paris, 1974.
13. P. Slater. *Inconsistencies in a Schedule of Paired Comparisons*. Biometrika, vol. 48, 1961, p. 303-312.
14. C. Thomassen. *Transversals of Circuits in the Lexicographic Product of Directed Graphs*. Math. Sc. Humaines, vol. 51, 1975, p. 43-45.
15. D. H. Younger. Communication personnelle, 1975.

IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS, 70, rue de Saint-Mandé, 93100 Montreuil
Dépôt légal 1976 : Imprimeur : 2124 — Éditeur : 029 — CPPP 53305
192058-76. 2e trimestre 1976 *Imprimé en France*
Le Directeur de la publication : P. Bordas